上海市研究生教育丛书

小波分析基础

XIAOBO FENXI JICHU

◎ 陈基明 编著

上海大学出版社

责任编辑：林溪波
封面设计：王 野

定价：12.00 元

ISBN 7-81058-558-4/O·022

上海市研究生教育丛书

本教材得到上海市研究生教育专项经费资助

小波分析基础

陈基明　编著

上海大学出版社
·上海·

内容简介

本书是一本小波分析的入门教材，主要内容包括：学习小波分析必须具备的预备知识；连续小波变换；离散小波变换；半离散小波变换；正交小波，半正交小波，双正交小波及其对偶；小波包的性质及应用；小波框架；最后还简单介绍了多维小波和向量小波。书中给出了较多的小波的构造实例和小波的应用实例。本书可作为非数学专业的大学高年级学生和研究生的教材，也可作为有关的工程技术人员学习小波分析的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

小波分析基础/陈基明编著．—上海：上海大学出版社，2002.12

ISBN 7-81058-558-4

Ⅰ．小…　Ⅱ．陈…　Ⅲ．小波分析-高等学校-教材　Ⅳ．O177

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第100750号

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路149号　邮政编码200072)

上海广厦电脑印刷厂印刷　　各地新华书店经销

开本880×1230　1/32　印张5　字数140千字

2002年12月第1版　　2002年12月第1次印刷

定价：12.00元

前　言

小波分析(Wavelet Analysis)是20世纪80年代开始发展起来的一个新兴的数学分支。小波分析是以泛函分析和调和分析为基础的一种新的信号分析的方法。小波分析从一开始发展就与很多学科的实际应用紧密联系在一起,小波理论的发展一直是伴随着实际应用。因此小波分析虽然发展历史不长,但已经在通信、地质、生物医学、自动化、湍流、分形、数值计算、微分方程求解等方面的应用中取得了引人注目的进展。小波分析的发展不仅受到数学工作者的极大关注,也引起了工程技术人员的极大关注。现在已有很多高等学校在应用数学和一些工科类专业中开设了小波分析及其应用的课程。

长期以来,傅里叶变换是信号处理的重要数学工具,但傅里叶变换只能反映信号的整体特征,而无法作信号的局部分析,小波变换在信号分析中具有独特的优势在于它可以有灵活可变的时频窗口,以适应不同频率的分辨率的需要,在时域和频域上都具有表征信号局部特性的能力,形象地说,小波变换具有"变焦"的功能,因此常常被称为"数学显微镜"。

编者在工作中了解到很多非数学专业的研究生希望能有一本不需要太多数学基础就能读懂的小波分析教材,帮助他们能在较短的时间内学习小波分析的基本理论和基本内容。出于这样的考虑,编者根据近几年在通信、材料、自动化和应用数学等专业的研究生中讲授小波分析课程的讲义,经修改整理而写成本教材。

本书力求用工科研究生容易接受的概念和语言来描述小波分析的基本理论和基本内容,尽可能用形象的语言和直观的背景来描述一些抽象的问题,尽量避免涉及较多的数学基础知识,避免使用较多的数学

术语。本书在不影响基本内容体系，不影响对基本理论的理解的前提下省略了一些繁锁的证明。因此只要具有高等数学和工程数学的基础，就能基本上读懂本书。

本书第一章作为预备知识，介绍了学习小波分析必须具有的数学知识，主要内容包括泛函分析中最基本的知识和傅里叶变换的基础，已有这方面知识的读者可以跳过第一章，直接从第二章开始阅读。第二章介绍小波变换的基本概念和连续小波变换，并给出了连续小波变换在地质方面的一个应用实例。第三章介绍多分辨分析和离散小波，正交小波基的构造，以及离散小波在取样定理中的应用。第四章介绍了小波包及其构造方法。小波包是正交小波基的一种推广，它是提高频域分辨率的一种很有效的方法。第五章介绍二进小波，半正交小波，双正交小波以及它们的对偶及特性，介绍了 Hilbert 空间中的框架概念和小波框架，并对各种小波进行了综合的分析和比较，还给出了二进小波的构造实例。最后第六章简要介绍了多维小波和向量小波。多维小波和向量小波的研究尚处于初级阶段，一些理论和方法还不成熟，还有大量的研究工作尚待深入。

本书可作为大学高年级学生和研究生的有关课程的教材，也可作为工程技术人员的自学参考书。

本书得到上海市教委研究生教材建设专项经费的资助。本书在写作和出版过程中得到上海大学研究生部、上海大学出版社、上海大学数学系的大力支持。特别要感谢上海大学彭瑞仁教授，许梦杰教授，安徽大学李世雄教授，他们对作者提供了极大的帮助，在此深表谢意。

限于作者的水平，本书难免存在缺点和不妥之处，恳请读者提出宝贵的意见。

编者　2002.8

目　　录

第一章　预备知识

§1.1　线性赋范空间

首先介绍一下泛函分析的有关概念。

从一个数集 X 到一个数集 Y 的一个映射 $f: X\to Y$,我们称 f 是一个函数。如果 X 不是一个数集,而是一个抽象集合(最常见的一个函数的集合),从 X 到数集 Y 的映射 $J: X\to Y$,这样的 J 我们称为一个泛函。比如 X 是区间$[a, b]$上可积函数的全体,$f(x)\in X$,定义 $J[f]=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,这样 J 就是一个函数 $f(x)$到一个数 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的映射,即 J 是一个泛函。又如 $g(x)$是$(-\infty, +\infty)$上一个取定的函数,X 是$(-\infty, +\infty)$上满足某种条件的函数的集合,$f(x)\in X$,$J[f]=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$(当然假定这个积分收敛),这样的 J 也是一个函数 $f(x)$到一个数 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 的映射,所以 J 也是一个泛函。这种泛函是一种很常用的泛函。

如果 X, Y 都是抽象集合,A 是 X 到 Y 的一个映射,称 A 是一个算子。

如 X 是 n 维列向量全体,Y 是 m 维列向量全体,$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\in X$,

$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}\in Y$,$A$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,线性变换 $\boldsymbol{y}=A\boldsymbol{x}$,这个 A 是

$X \to Y$的一个算子。

用$C^k[a, b]$表示定义在$[a, b]$上的具有k阶连续导数的函数全体，$f(x) \in C^k[a, b]$，定义$D[f] = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = g(x)$，则$g(x) \in C^{k-1}[a, b]$，D是$C^k[a, b]$到$C^{k-1}[a, b]$的一个算子。

在具有两阶连续偏导数的二元函数上定义$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$，则微分方程$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y)$就可以记为$Lu = f$，这个$L$就是$u$到$f$的一个算子。

本书中用到大量的积分表达式，这些积分通常是指勒贝格(Lebesgue)积分。勒贝格积分是"高等数学"课程中讲到的黎曼(Riemann)积分的一个推广。这里不打算详细介绍勒贝格积分，我们仅指出这样一个结论，一个函数如果在黎曼积分的意义下是可积的，那么在勒贝格积分的意义下也一定是可积的，且两者的积分值相等，凡对黎曼积分成立的性质，对勒贝格积分也成立。但勒贝格可积的函数不一定是黎曼可积，所以勒贝格可积函数比黎曼可积函数包括的范围更广。

在微积分中，我们知道，如果$f(x) = g(x)$，则可推出$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，但如果$f(x)$和$g(x)$在一些点$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$上不等时，只要这些点是离散点，不构成一个区间，就不影响其积分值，这时尽管$f(x) \neq g(x)$，但$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

记$X = \{x \mid f(x) \neq g(x), x \in [a, b]\}$，如果$X$的"长度"(严格地说应该是某种测度)为零，那么我们称$f(x)$和$g(x)$在$[a, b]$上几乎处处相等，或称$f(x) = g(x)$在$[a, b]$上几乎处处成立。记为$f(x) \doteq g(x)$，几乎处处相等的函数其积分值一定相等。

定义 1.1 设X是一个非空集合，K是一个数域，以x表示X中的元素，在X中定义了加法运算和数乘运算，这些运算满足以下规律：

$$x + y = y + x;$$

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

存在零元素 $\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{x}$；

存在 $\boldsymbol{x}$ 的负元素 $-\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\theta}$；

$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$；

$(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x})$，$\lambda, \mu\in K$；

$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$，　　$\lambda, \mu\in K$。

这样的集合 X 称数域 K 上的线性空间，又称向量空间，其中的元素也可以称为向量或点。

如 X 是 $m\times n$ 实矩阵全体，按通常的矩阵加法和数乘运算，X 是一个线性空间。

X 是 $[a, b]$ 上连续函数全体，按通常的函数加法和数乘运算，X 也是一个线性空间。

$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 是线性空间 X 中的元素，由 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的线性组合的全体所成的集合 $\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{x}_i \,\middle|\, \lambda_i\in K\right\}$，称为 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ 的生成空间，记为 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$。如 X 是三维空间中的向量全体，$X=\{(x, y, z)\mid x, y, z\in\mathbf{R}\}$，$\boldsymbol{i}=(1, 0, 0)$，$\boldsymbol{j}=(0, 1, 0)$，$\boldsymbol{k}=(0, 0, 1)$，则 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ 就是 X，而 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}\}$ 就是 xoy 平面上的向量全体。

设 X, Y 是同一数域上的两个线性空间，则 $X\times Y=\{(x, y)\mid x\in X, y\in Y\}$ 称为 X, Y 的乘积空间。特别当 $X=Y$ 时，$X\times Y=X^2=\{(x, y)\mid x, y\in X\}$。

记 $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$ 为实数全体，则 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x, y)\mid x, y\in\mathbf{R}\}$ 就是二维实向量全体。

n 维实向量全体 $\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n\text{个}}$

定义 1.2　X 是一个线性空间，F 是 X 上的一个泛函，记为 $F(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$，如果 $\|\cdot\|$ 满足下列三个条件：

(1) $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$，$\forall\boldsymbol{x}\in X$，且 $\|\boldsymbol{x}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$。

(2) $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$，$\forall\boldsymbol{x}\in X$，$\lambda$ 为常数。

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$，$\forall x, y \in X$。

则称这个泛函 $F = \|\cdot\|$ 为 X 上的一个范数。上述三个条件又称范数公理。

定义了范数的线性空间称为线性赋范空间。

范数是数的绝对值概念的一种推广。数的绝对值显然满足范数公理，所以绝对值也可以看做是一种范数。

例 1.1 对于 n 维实向量全体 $\mathbf{R}^n$，$x \in \mathbf{R}^n$，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 定义 $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$，$\mathbf{R}^n$ 按这个范数 $\|\cdot\|_2$ 构成一个线性赋范空间。

例 1.2 $C[a, b]$表示$[a, b]$上连续函数全体所组成的线性空间，$f(x) \in C[a, b]$，定义 $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$，则 $C[a, b]$按这个范数 $\|\cdot\|_1$ 构成一个线性赋范空间。

如果在 $C[a, b]$上定义另外一种范数 $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$，那么 $C[a, b]$按这样的范数 $\|\cdot\|$ 构成另外一个线性赋范空间。

例 1.3 $[a, b]$ 上 p 次勒贝格可积函数全体$\left\{f(x) \middle| \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\right\}$把几乎处处相等的函数作为同一函数。记为 $L^p[a, b]$，在 $L^p[a, b]$上定义范数 $\|f\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$，则 $L^p[a, b]$构成一个线性赋范空间。

在$(-\infty, +\infty)$上的 p 次勒贝格可积函数全体 $L^p(-\infty, +\infty)$，在其上定义范数 $\|f\|_{L^p(-\infty,+\infty)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$，则 $L^p(-\infty, +\infty)$ 成为一个线性赋范空间，通常记为 $L^p(\mathbf{R})$或简记为 L^p。L^p 空间是一种很重要的线性赋范空间，特别是 $p = 2$ 时，L^2 空间是小波分析中使用最多的一种线性赋范空间。

L^p 空间中的两个重要的不等式：

1. 赫尔德(Hölder)不等式

设 $p > 1$，$q > 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$，$f \in L^p$，$g \in L^q$，则 $f \cdot g \in L^1$，

且有 $\|f\cdot g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}$。

特别当 $p=q=2$ 时，称为许瓦尔兹(Schwarz)不等式：$\|f\cdot g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^2}\cdot\|g\|_{L^2}$。

2. 闵可夫斯基(Minkowski)不等式

对于 $p>1$，$\|f+g\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$。

例 1.4 记 $x=\{x_k\}$ 是一个数列，对于 $p\geqslant 1$，记 $l^p=\left\{x\,\middle|\,\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}$，在 l^p 上定义范数 $\|x\|_{l^p}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$，$l^p$ 成为一个线性赋范空间。上述两个不等式对 l^p 空间也同样成立。

定义 1.3 $\{x_n\}$是线性赋范空间 X 中的序列，如果存在一个 x，使 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，则称序列$\{x_n\}$按范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 x。

以后非特别说明，对于线性赋范空间中的收敛都是指按范数收敛。

定义 1.4 $\{x_n\}$是线性赋范空间中的序列，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时，$\|x_m-x_n\|<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是一个基本序列，又称柯西序列。

如果 X 中的每一个基本序列都收敛于 X 中的元素，则称 X 是完备的，完备的线性赋范空间称为巴拿赫(Banach)空间。

L^p，l^p 都是 Banach 空间。

$C[a,b]$关于范数 $\|f\|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$ 是 Banach 空间，但关于范数 $\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$ 不是 Banach 空间。

由线性代数的知识知道，对于 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$，存在 n 个线性无关的向量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，使得 $\mathbf{R}^n$ 中的任一向量 x，可以唯一地表示为这 n 个向量的线性组合，即这 n 个线性无关的向量构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，$\mathbf{R}^n$ 可以作为基的生成空间，$\mathbf{R}^n=\mathrm{span}\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$\mathbf{R}^n$ 中的基不是唯一的，任何 n 个线性无关的向量都可以作为基。现把基的概念推广到无限维空间。

定义 1.5 设 B 是一个 Banach 空间，$\{\varphi_k,k=1,2,\cdots\}$ 是 B 中的一个序列，如果对于任意的 $f\in B$，存在唯一的数列$\{c_k\}$，使得 $f=$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$，且级数无条件收敛(即与项的排列次序无关)，则称序列$\{\varphi_k\}$是B的一个无条件基。

与有限维空间不同，无限维的 Banach 空间不一定存在无条件基。即使存在无条件基$\{\varphi_k\}$，$\{\varphi_k\}$的生成空间 $\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$ 也不一定就是这个 Banach 空间本身，因为在无限维空间中还涉及收敛序列的极限点，一个集合A加上它的所有的极限点后得到的集合，称为A的闭包，记为$\overline{A}$。$\{\varphi_k\}$的所有的线性组合所成的集合的闭包$\overline{\text{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}}$就是这个 Banach 空间$B$。

§1.2 内积空间

定义 1.6 X是数域K上的一个线性空间，F是乘积空间$X \times X$上的一个泛函，记为$F(x, y) = (x, y)$，如果$(\cdot, \cdot)$满足下列条件：

(1) $(x, x) \geqslant 0$，对任意的$x \in X$成立，且$(x, x) = 0$当且仅当$x = \theta$；

(2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$，这里$\overline{(y, x)}$表示$(y, x)$的共轭复数；

(3) 对常数λ_1、λ_2有$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 (x_1, y) + \lambda_2 (x_2, y)$。

则称$(\cdot, \cdot)$为X中的内积。这三个条件又称为内积公理。定义了内积的线性空间称为内积空间。

例 1.5 在n维实向量空间$\mathbf{R}^n$中，定义内积$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$，$\mathbf{R}^n$就成为一个内积空间。

在n维复向量空间$\mathbf{C}^n$中，定义内积$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$，$\mathbf{C}^n$也成为一个内积空间。

例 1.6 在L^2中定义$(x(t), y(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t)} \mathrm{d}t$，$L^2$就成为一个内积空间。

在l^2中定义内积$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$，$l^2$也成为一个内积空间。这

里 $x = \{x_k\}$，$y = \{y_k\}$。

内积满足柯西-许瓦尔兹不等式：

$|(x, y)| \leqslant \sqrt{(x, x)(y, y)}$ 对任意的内积空间中的元素 x，y 成立。

我们可以在内积空间中定义一个与内积有关的范数，$\|x\| = \sqrt{(x, x)}$，容易验证，这样定义的 $\|\cdot\|$ 满足范数公理。所以内积空间中按内积导出范数后又成为一个线性赋范空间。如果内积空间按这样的范数又是完备的，则此内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间。

L^2，l^2 都是希尔伯特空间。

L^p，l^p 当 $p \neq 2$ 时不能成为内积空间。

定义 1.7 H 是一个希尔伯特空间，$\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 中的一族元素，且 $H = \overline{\text{span}\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}}$（这里 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合），如果对于 H 中的任一元素 f，存在唯一的数列 $C = \{c_k\}$，使得 $f = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi_k$，且存在常数 A，B，$B > A > 0$，使对任意的 l^2 中的数列 $C = \{c_k\}$ 有

$A\|C\|_{l^2} \leqslant \|\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi_k\| \leqslant B\|C\|_{l^2}$，则称 $\{\varphi_k, k \in \mathbf{Z}\}$ 是 H 的一个黎茨(Riesz)基。

这个条件 $A\|C\|_{l^2} \leqslant \|\sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \varphi_k\| \leqslant B\|C\|_{l^2}$ 称为 Riesz 条件。

Riesz 基是 Hilbert 空间中的无条件基。有时就把 Hilbert 空间中的无条件基称为 Riesz 基。

定义了内积后，就可以把 n 维欧氏空间中的一些几何概念推广到内积空间中去。

定义 1.8 X 是一个内积空间，x，$y \in X$，$\sqrt{(x, x)}$ 称为元素 x 的长度，$\arccos \dfrac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}}$ 称为元素 x，y 之间的夹角。如果 $(x, y) = 0$，则称 x 与 y 正交。

设 Y 是内积空间 X 的子集，如果 Y 中的元素都相互正交，则称 Y 是一个正交系，进一步如果 Y 中的所有元素还满足 $\|y\| = 1$，则称 Y 是一个标准正交系。

设$\{e_k, k\in \mathbf{Z}\}$是内积空间 X 的一个无条件基，同时$\{e_k, k\in \mathbf{Z}\}$还是一个标准正交系，即 $(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$，则称$\{e_k, k\in \mathbf{Z}\}$是 X 的一个标准正交基。δ_{ij} 称为克朗内克符号，其定义就是 $\delta_{ij} = \begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$。对于 X 中的每一个元素 x，都可以唯一地表示为一个级数 $x = \sum_{k\in \mathbf{Z}} c_k e_k$，对这个级数两边与 e_i 作内积后，由于 $(e_k, e_i) = \delta_{ki}$，所以 $c_k = (x, e_k)$，这就是 X 中的元素 x 在这组基下的“坐标”。

与 n 维欧氏空间中的基比较，n 维欧氏空间中任何 n 个线性无关的向量都可以成为一组基，$\mathbf{R}^n$ 中的任一向量可以由这组基线性表示，且表示式惟一。Hilbert 空间中的 Riesz 基就相当于这样的基。而 $\mathbf{R}^n$ 中特别有用的是标准正交基，$\mathbf{R}^n$ 中的任意一组基都与标准正交基等价，通过正交规范化方法，可以把任何一组基化为标准正交基。在 Hilbert 空间中 Riesz 基也与标准正交基等价，一个 Riesz 基也可以通过正交规范化的方法成为标准正交基。

定义 1.9 X 是一个内积空间，M 是 X 的真子集，$x \in X$，但 $x \notin M$，如果对于任意的 $y \in M$，都有 $(x, y) = 0$，则称 x 与 M 正交，记为 $x \perp M$。

又设 M，N 都是 X 的真子集，如果对任意的 $x \in M$，任意的 $y \in N$，都有 $(x, y) = 0$，则称 M 与 N 正交，记为 $M \perp N$。

M 是 X 的真子集，X 中所有与 M 正交的元素的集合 $\{x \mid x \in X, x \perp M\}$ 称为 M 在 X 中的正交补，记为 $M^{\perp}$。

显然，$M \perp M^{\perp}$，且 $M \cap M^{\perp} = \{\boldsymbol{\theta}\}$，$M \cup M^{\perp} = X$。

内积空间中的元素 x，y 正交的充分必要条件是“勾股定理”成立，即 $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$。

因为 $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) = (x, x) + (y, y) \Longleftrightarrow (x, y) = (y, x) = 0$。

一个内积空间 X，可以分解为它的一些子空间的并：

$X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_N$，$X_i \subset X$，$i = 1, 2, \cdots, N$。有时也记为

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$。如果子空间之间还满足 $X_i \cap X_j = \{\boldsymbol{\theta}\}$，当 $i \neq j$ 时，这时 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_N$ 称 X 分解为子空间的直和，记为 $X = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_N$。如果这些子空间之间还是两两正交的：$X_i \perp X_j$，当 $i \neq j$ 时，这样的和称为正交和，记为 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_N$。

把一个内积空间分解为若干个子空间的正交和，就相当于在这个空间中建立了一个"直角坐标系"，这样内积空间中的任何一个元素 $\boldsymbol{x}$，都可以"投影"到这些子空间上去，$\boldsymbol{x}$ 就可以有"分量表示式"，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_N$，$\boldsymbol{x}_i \in X_i$，$i = 1, 2, \cdots, N$。这就如同三维向量空间中的任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以投影到 x，y，z 三条坐标轴上，$\boldsymbol{x} = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$。如果 $Y_i = \{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_{k_i}^{(i)}\}$ 是子空间 X_i 的标准正交基，$i = 1, 2, \cdots, N$，则把这些标准正交基并起来 $\{y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots, y_{k_1}^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \cdots, y_{k_2}^{(2)}, \cdots, y_1^{(N)}, y_2^{(N)}, \cdots, y_{k_N}^{(N)}\}$ 就成为 X 的标准正交基。

无限维的 Hilbert 空间与 n 维欧氏空间有很多类似之处，n 维欧氏空间中的很多性质可以推广到无限维的 Hilbert 空间上去。

§1.3 傅里叶变换

小波变换是在傅里叶变换的基础上发展起来的。

定义 1.10 设 $f(t) \in L^1$，则 $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶(Fourier)变换。有时也用记号 $F[f(t)] = \hat{f}(\omega)$，为了突出变量是 ω，有时也记为 $(Ff)(\omega) = \hat{f}(\omega)$。

一个信号 $f(t)$ 的自变量 t 是时间(或空间)的变化范围，常常称为时(空)域，而其傅里叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 的自变量 ω 是频率的变化范围，常常称为频域。

傅里叶变换把一个时域上的信号 $f(t)$ 映射到频域上。那么频域上的信号表示 $\hat{f}(\omega)$ 能否"回复"到时域信号呢。

定义 1.11 设 $\hat{f}(\omega) \in L^1$，$\hat{f}(\omega)$ 是某个函数 $f(t) \in L^1$ 的傅里叶

变换，则 $g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ 称为 $\hat{f}(\omega)$ 的傅里叶逆变换，记为 $F^{-1}[\hat{f}(\omega)]$ 或 $(F^{-1}\hat{f})(t)$。

但要注意 $F^{-1}[\hat{f}(\omega)]$ 不一定等于 $f(t)$。只有当 $f(t)\in L^1$ 时，$\hat{f}(\omega)\in L^1$，则在 $f(t)$ 的连续点上，才有 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$，以后非特别说明 $f(t)=(F^{-1}\hat{f})(t)$ 都是指这种意义。

当 $f(t)\in L^1$ 时，$\hat{f}(\omega)$ 不一定属于 L^1，所以对每一个 $\hat{f}(\omega)$ 不一定能通过逆变换回复到 $f(t)$，只有那些属于 L^1 的 $\hat{f}(\omega)$ 才能作逆变换。而且 L^1 不是希尔伯特空间。小波变换中用到的是 L^2 中的傅里叶变换。但若 $f(t)\in L^2$，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ 不一定有意义。

记 $\text{supp}\,f(t)=\{t\mid f(t)\neq 0\}$，$\text{supp}\,f(t)$ 称为 $f(t)$ 的支集。如果 $f(t)$ 的支集是紧集（有界闭集），则称 $f(t)$ 有紧支集。对于有紧支集的函数 $f(t)$，显然有 $f(t)\in L^1\cap L^2$。

设 $f(t)\in L^2$，令 $X_N(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqslant N\\ 0 & |t|>N\end{cases}$，$X_N(t)$ 称为截断函数，记 $f_N(t)=f(t)\cdot X_N(t)$，显然 $\text{supp}\,f_N(t)\subset[-N,N]$，由于 $f_N(t)\in L^1$，所以 $\hat{f}_N(\omega)$ 在 L^1 上有意义，又由于 $f_N(t)\in L^2$，$\hat{f}_N(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_N(t)e^{-i\omega t}dt$ 当然也有意义，而且可以证明 $\hat{f}_N(\omega)\in L^2$。对于这样定义的 $f_N(t)$，当然有 $\lim\limits_{N\to\infty}\|f_N-f\|_{L^2}=0$。以后非特别说明，在 L^2 中，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$ 都是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^2}=0$。对上述定义的 $\hat{f}_N(\omega)$，如果 $\lim\limits_{N\to\infty}\hat{f}_N(\omega)=\hat{f}(\omega)$，则称 $\hat{f}(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换，这就是 L^2 中的傅里叶变换。由于 L^2 是一个完备的空间，所以 $\hat{f}(\omega)\in L^2$。因此傅里叶变换是 L^2 到 L^2 的一个映射，即对于 $\forall f\in L^2$，必存在唯一的一个 $g\in L^2$，使 $F[f]=g$。换句话说，对于 L^2 中的任意一个函数的傅里叶变换，都可以通过逆变换"回复"到原象函数。

在 L^2 中定义了内积 $(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t$ 后,傅里叶变换可以写成内积形式 $(f(t), \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$。

现在列出小波变换中常用到的一些傅里叶变换的性质:

$F[f(t \pm t_0)] = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t_0} F[f(t)]$;

$F[f(at)] = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$, $a \neq 0$;

$F[f \cdot g] = (\hat{f} * \hat{g})(\omega)$,这里"*"表示卷积;

$(f, g) = \frac{1}{2\pi}(\hat{f}, \hat{g})$,称为巴塞伐尔等式(Parseval),且 $(\hat{f}, g) = (f, \hat{g})$;

$F[F[f(t)]] = F[\hat{f}(\omega)] = 2\pi f(-t)$。

$f^{(k)}(t)$在$(-\infty, +\infty)$上几乎处处连续,则当 $\omega \to \infty$时,$\hat{f}(\omega) = 0\left(\frac{1}{|\omega|^k}\right)$,即 $f(t)$越光滑,则当 $\omega \to \infty$ 时,$\hat{f}(\omega)$趋向于零的速度越快。

定义 1.12 设$\{c_k\}$是一个数列,如果 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ 收敛,则 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$ 称为数列$\{c_k\}$的离散傅里叶变换,记为 $(F^*\{c_k\})(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$。

数列$\{c_k\}$可以看做信号 $f(t)$的离散值,所以离散傅里叶变换在数值计算中很有用。如果$\{c_k\} \in l^2$,则$(F^*\{c_k\})(t) \in L^2(0, 2\pi)$。

用 $L^p(\mathbf{R}^n)$表示满足条件 $\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n个} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$ 的 n 元函数全体,这里 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n$,我们可以把一维的傅里叶变换很容易地推广到 n 维傅里叶变换。

定义 1.13 设 $f(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$, $\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(x, \omega)}\mathrm{d}x =$

$\int \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) e^{-ix_1\omega_1} e^{-ix_2\omega_2} \cdots e^{-ix_n\omega_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ 称为 $f(x)$的傅里叶变换。$F^{-1}[\hat{f}(\omega)] = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n} \hat{f}(\omega) e^{i(x,\omega)} d\omega$ 称为$\hat{f}(\omega)$的傅里叶逆变换。

$L^2(\mathbf{R}^n)$中的傅里叶变换与$L^2(\mathbf{R})$中的傅里叶变换有类似的性质。如平移性质，$F[f(\boldsymbol{x}\pm\boldsymbol{h})] = e^{\pm i(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\omega})}\hat{f}(\boldsymbol{\omega})$，这里$(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\omega})$是$\mathbf{R}^n$中的内积$(\boldsymbol{h},\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=1}^{n} h_i\omega_i$。

伸缩性质　$F[f(c\boldsymbol{x})] = c^{-n}\hat{f}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{c}\right)$，这里$c$是不等于零的常数。

巴塞伐尔等式　$(f, g) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{f}, \hat{g})$

$$(f, \hat{g}) = (\hat{f}, g)$$

等等。

第二章　小波变换的定义及其基本性质

§2.1　加 博 变 换

傅里叶变换是信号及其频谱分析最常用的工具。如果已知一个信号 $f(t)$ 在全部时间 $-\infty < t < +\infty$ 的信息，便可得到频谱信息 $\hat{f}(\omega)$，反之由一个信号的频谱信息，也可重建该信号。或者说 $f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 是同一个具有能量的信号两种不同形式的表示，$f(t)$ 是信号在时域上的表示，它从时间信息上反映该能量信号，而 $\hat{f}(\omega)$ 是信号在频域上的表示，它从频率信息上反映该能量信号，它们包含相同的信息量。傅里叶变换使我们可以把时域空间的内容转换到频域空间上去研究，当然也可以把频域空间的内容转换到时域空间上研究，而在这样的转换中不丢失信息。但傅里叶变换仅能反映信号及其频谱的整体特性。从 $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$ 可知，要从一个信号 $f(t)$ 来得到频谱 $\hat{f}(\omega)$，必须取无限的时间量 $(-\infty, +\infty)$，反之要利用频谱来描述信号时，无论这个信号的时间段多么短，都需要用整个频域来描述。在某一时间段 $[t_1, t_2]$ 对应的频谱信息，傅里叶变换无法给出，而这种局部信息又常常是我们十分感兴趣的。如对音乐信号，我们常常关心的是什么时候发出什么频率的音符。对地震信号我们关心的是什么空间位置出现什么频率的波，等等。即傅里叶变换不具有局部性。为了解决这种局部性问题，在 20 世纪 40 年代，诺贝尔奖获得者加博(Gabor)提出了“窗

口傅里叶变换"的概念，又称加博变换。

加博变换就是用一个有紧支集的函数，或很快趋近于零的函数 $g(t)$ 去乘 $f(t)$，这相当于开了一个"窗口"，见图 2-1。

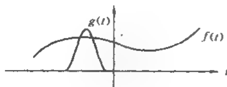


图 2-1

然后对 $g(t)\cdot f(t)$ 作傅里叶变换。为了在不同的位置开窗口，则对 $g(t)$ 作平移 $g(t-\tau)$，$G_f(\omega,\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t-\tau)e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$，这就是加博变换。加博变换带有两个参数，$\omega$ 反映了频率，τ 是反映了窗口的位置，取不同的 τ，就可以得到不同时间段的频谱特性。

局部分析的关键是"窗口"，窗口的尺度是局部性程度的表征。我们当然希望在时域和频域都能有很合适的窗口以便于作时间和频率的局部分析。Paley-Wiener 定理告诉我们，不存在一个非零函数 $f(t)\in L^2$，使 $f(t)$ 和 $\hat{f}(\omega)$ 都有紧支集。因此一个函数在时域和频域的局部性不能单单用函数及其傅里叶变换的支集来刻画。还需要把支集的概念推广。

定义 2.1 设 $f(t)\in L^2$，如果 $tf(t)\in L^2$，则称 $f(t)$ 是一个窗口函数。

$t_f^*=\dfrac{1}{\|f\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty} t\,|f(t)|^2\mathrm{d}t$ 称 $f(t)$ 的窗口中心。

$\Delta_f=\dfrac{1}{\|f\|}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|t-t_f^*|^2\,|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$ 称 $f(t)$ 的窗口半径。$2\Delta_f$ 称 $f(t)$ 的窗口宽度。

如果 $\hat{f}(\omega)$ 也是窗口函数，则 $4\Delta_f\cdot\Delta_{\hat{f}}$ 称时频窗口的窗口面积。

有紧支集的函数一定是窗口函数，但窗口函数不一定有紧支集。如高斯(Gauss)函数 $g_a(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{t^2}{4a}}$ 是没有紧支集的，但它是窗口函

数。窗口函数是衰减比较快的函数。对没有紧支集的函数，窗口是支集的一种近似概念，对有紧支集的函数，支集的长度和窗口宽度也并非相等。这样，不是非要有紧支集的函数才能对 $f(t)$"开窗"。高斯函数是加博变换的一个常用的窗口函数。$g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{t^2}{4a}}$，则 $g_a(t)$ 的窗口半径 $\Delta_{g_a} = \sqrt{a}$，$\hat{g}_a(\omega) = e^{-a\omega^2}$ 还是一个高斯函数，$\hat{g}_a(\omega)$ 的窗口半径 $\Delta_{\hat{g}_a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$。以 $g_a(t)$ 为窗口函数的加博变换 $G_f(\omega, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_a(t-\tau)e^{-i\omega t}dt$，其时域窗口为 $[\tau-\sqrt{a}, \tau+\sqrt{a}]$，频域窗口为 $\left[\omega-\frac{1}{2\sqrt{a}}, \omega+\frac{1}{2\sqrt{a}}\right]$，时频窗口的面积为 2，与 a 无关。加博变换的时频窗口的大小、形状由窗口函数确定，在变换中窗口的大小、形状保持不变，只有位置的变化。见图 2－2。

图 2－2

设 $g(t)$，$\hat{g}(\omega)$ 都是窗口函数，t^*，ω^* 分别是它们的窗口中心(这是由 $g(t)$ 和 $\hat{g}(\omega)$ 确定的)，则加博变换的时频窗口为 $[t^*+\tau-\Delta_g, t^*+\tau+\Delta_g]\times[\omega^*+\omega-\Delta_{\hat{g}}, \omega^*+\omega+\Delta_{\hat{g}}]$，由此可以看出时域窗口仅随 τ 的变化而平行移动，而频域窗口仅随 ω 的变化上下移动，时频窗口的面积为 $4\Delta_g\cdot\Delta_{\hat{g}}$，也是由所选择的窗口函数所确定。

与傅里叶变换一样，加博变换也有反演公式。

定理 2.1 设 $f(t)\in L^2$，$g(t)$，$\hat{g}(\omega)$ 都是窗口函数，$G_f(\omega, \tau)$ 是 $f(t)$ 的以 $g(t)$ 为窗口的加博变换，则在 $f(t)$ 的连续点上有 $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} G_f(\omega, \tau)g(t-\tau)e^{i\omega t}d\omega d\tau$。

加博变换在一定程度上解决了局部分析的问题，但加博变换存在着两个较严重的缺陷。其一，加博变换的时频窗口的大小、形状不变，只有位置变化，而实际应用中常常希望时频窗口的大小、形状要随频率的变化而变化，因为信号的频率与周期成反比，对高频部分希望能给出

相对较窄的时间窗口，以提高分辨率；而对低频部分，则希望能给出相对较宽的时间窗口，以保证信息的完整性。总之，希望能给出能够调节的时频窗。但加博变换不能做到这一点。其二，在数值计算中常常要作离散化处理，对于傅里叶变换 $e^{i\omega t}$ 离散化以后 $\{1, \cos\kappa t, \sin\kappa t, \kappa = 1, 2, \cdots\}$ 可以成为正交系，在这个正交系下，一个函数可以展开为傅里叶级数，其傅里叶系数容易求得。但加博变换 $g(t-\tau)e^{i\omega t}$ 离散化后不能成为正交系。

为了提高分辨率，希望时域窗口的半径和频域窗口的半径都能小一些，但是海森堡（Heisenberg）证明了，时频窗口的面积不能无限地小，要想缩小时域窗口的宽度必须以扩大频域窗口的宽度为代价。这就是所谓测不准原理。

定理 2.2 设 $f(t)$，$\hat{f}(\omega)$ 都是窗口函数，则 $\Delta_f \cdot \Delta_{\hat{f}} \geqslant \frac{1}{2}$。

证明 不妨设 $t_f^* = t_{\hat{f}}^* = 0$

$$(\Delta_f \cdot \Delta_{\hat{f}})^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \mid f(t) \mid^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \mid \hat{f}(\omega) \mid^2 d\omega}{\| f \|^2 \cdot \| \hat{f} \|^2} \tag{2.1}$$

因为 $\| \hat{f} \|^2 = 2\pi \| f \|^2$，$F[f'(t)] = i\omega \hat{f}(\omega)$，

所以 $\| f \|^2 \cdot \| \hat{f} \|^2 = 2\pi \| f \|^4$，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega^2 \mid \hat{f}(\omega) \mid^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \mid F[f'(t)] \mid^2 d\omega = 2\pi \| f' \|^2,$$

代入(2.1)式后得

$$(\Delta_f \cdot \Delta_{\hat{f}})^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \mid tf(t) \mid^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \mid f'(t) \mid^2 dt}{\| f \|^4}$$

$$= \frac{\| tf(t) \|^2 \cdot \| f' \|^2}{\| f \|^4}。 \tag{2.2}$$

由赫尔德不等式 $\|tf(t)\|^2\|f'\|^2 \geqslant \|tff'\|^2$，且 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(t))^2 = 2f(t)f'(t)$，所以 $(\Delta_f \cdot \Delta_{\hat{f}})^2 \geqslant \frac{1}{\|f\|^4}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)f'(t)\mathrm{d}t\right|^2 = \frac{1}{\|f\|^4}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}[f(t)]^2\right)^2$。

由于 $f(t) \in L^2$，所以 $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{d}[f(t)]^2 = \lim_{t\to\infty} t(f(t))^2 - \int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t,$$

$$(\Delta_f \cdot \Delta_{\hat{f}})^2 \geqslant \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\|f\|^4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{1}{4}。$$

前面提到的高斯函数 $g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{t^2}{4a}}$，其窗口面积 $2\Delta_{g_a}\cdot 2\Delta_{\hat{g}_a} = 2$，所以已达到测不准原理的下界，因此这是时频窗口面积达到最小的函数。由此也可以知道 Δ_f 和 $\Delta_{\hat{f}}$ 是相互制约的。

§2.2 小波变换

20 世纪 80 年代，法国地质学家 J. Morlet 在研究地下岩石油层分布时，对傅里叶变换和加博变换作了深入的研究之后，提出了“小波”(Wavelet)的概念，建立了 Morlet 小波。应用小波方法在地质数据处理中，取得了极大的成功。随后数学家 Meyer，Mallat，Daubechies，K. Chui等人的工作为小波分析学科的诞生和发展奠定了基础。同时计算机的发展，也为小波分析的发展提供了有利条件，有些不能用解析式表示的小波，借助于计算机得到了广泛的应用。

小波变换继承和发展了加博变换的局部化思想，同时克服了傅里叶变换和加博变换的一些缺陷。最重要的是小波变换给出了一个可以调节的时频窗口，窗口的宽度随频率变化，频率增高时，时间窗口的宽度自动变窄，以提高分辨率，正如有的文献中的比喻“采用小波分析，就像使用一架带可变焦距镜头的照相机一样，可以转向任一细节部分”。因此，它是一种很理想的局部分析的数学工具。尽管小波分析的历史

很短，但发展十分迅速，很快渗透到数学和工程技术的各个领域，并取得了令人瞩目的进展，特别是在信息处理方面的应用获得了巨大的成功。

定义 2.2 设函数 $\psi(t)\in L^2$，如果积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega$ 收敛，则称 $\psi(t)$ 是一个小波母函数。这个条件称允许性条件。又设 a，b 是常数，且 $a\neq 0$，记 $\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$，则 $\psi_{a,b}(t)$ 称为由母函数 $\psi(t)$ 生成的连续小波。

允许性条件是一个很容易满足的条件，这为小波母函数的选择提供了很大的余地。

在很多情况下，为了局部分析的需要，还常常要求小波母函数 $\psi(t)$ 及其傅里叶变换 $\hat{\psi}(\omega)$ 是窗口函数。即 $t\psi(t)\in L^2$，$\omega\hat{\psi}(\omega)\in L^2$。

定义 2.3 设 $f(t)\in L^2$，$\psi(t)$ 是一个小波母函数，$(f,\psi_{a,b})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{\psi_{a,b}(t)}dt$ 称为 $f(t)$ 关于 $\psi(t)$ 的连续小波变换，记为 $W_f(a,b)$ 或 $(W_\psi f)(a,b)$。

将小波变换与傅里叶变换、加博变换作一个比较：

傅里叶变换 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=(f(t),e^{i\omega t})=\hat{f}(\omega)$，仅含一个参数 ω，ω 的变化改变频谱结构，变换的母函数 e^{it} 是固定不变的，由于 $|e^{it}|=1$，所以不具有局部性。

加博变换 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)g(t-\tau)e^{-i\omega t}dt=(f(t),\overline{g(t-\tau)e^{i\omega t}})=G_f(\omega,\tau)$，含有两个参数，参数 ω 的作用与傅里叶变换一样，反映频谱结构，τ 的作用是控制窗口的位置，变换的母函数 $g(t)e^{it}$，$g(t)$ 可以根据需要选择，由于 $\lim\limits_{t\to\infty}g(t)=0$，所以具有局部性。

小波变换 $W_f(a,b)$ 也包含两个参数，参数 b 的作用与加博变换中的参数 τ 的作用一样，是控制窗口的位置，而 $\psi(t)\in L^2$，当然有 $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$，所以也具有局部性，这两点与加博变换一样。而小波变换中的另一

个参数 a，不仅可以改变频谱结构，而且可以改变窗口的形状，起到"变焦"的作用。

记 $f_a(t) = f(at)$，根据傅里叶变换的伸缩性质，$\hat{f}_a(\omega) = \frac{1}{|a|}\hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$，所以当时域函数 $f(t)$ 在时间尺度上扩展 a 倍时，其频域函数 $\hat{f}(\omega)$ 在频率坐标上将压缩 a 倍。反之，当时间尺度上压缩时，频率尺度将扩展相同的倍数。所以信号持续的时间与信号占有的频带宽度成反比。

设小波母函数 $\psi(t)$ 的窗口半径为 Δ_ψ，则连续小波 $\psi_{a,b}(t)$ 的窗口半径 $\Delta_{\psi_{a,b}} = |a|\Delta_\psi$，$\hat{\psi}(\omega)$ 的窗口半径为 $\Delta_{\hat{\psi}}$，而 $\hat{\psi}_{a,b}(\omega) = \sqrt{|a|}e^{-ib\omega}\hat{\psi}(a\omega)$，$\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$ 的窗口半径为 $\frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}}$，所以当 $|a|$ 缩小时 $\psi_{a,b}(t)$ 的频谱 $\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$ 趋向高频，而这时 $\psi_{a,b}(t)$ 的窗口半径减小，这恰好满足了实际应用中，在检测高频部分时，希望时域窗口的半径减小，以提高分辨率的要求。反之，当 $|a|$ 扩大时，时域窗口变宽，频域窗口变窄，频谱趋于低频。因此小波 $\psi_{a,b}(t)$ 的时频窗口 $[b-|a|\Delta_\psi, b+|a|\Delta_\psi] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}}\right]$ 的形状是可以由 a 来进行调节，这里 ω^* 是 $\hat{\psi}(\omega)$ 的窗口中心，而 $\psi_{a,b}(t)$ 的时频窗口的面积为 $2|a|\Delta_\psi \cdot 2\frac{1}{|a|}\Delta_{\hat{\psi}} = 4\Delta_\psi \cdot \Delta_{\hat{\psi}}$，这恰好等于 $\psi(t)$ 的时频窗口的面积(见图 2-3)。

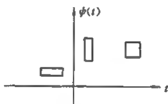


图 2-3

小波 $\psi_{a,b}(t)$ 中的参数 a 称为尺度参数，它决定了时频窗口的形状，参数 b 决定了窗口的位置，称之为定位参数。

由于 $\psi_{a,b}(t)$ 的时频窗口的面积为 $4\Delta_\psi \cdot \Delta_{\hat{\psi}}$，与 a，b 无关，仅仅与 $\psi(t)$ 的选取有关，所以不能通过选择 a 使时域和频域窗口的半径同时缩小，时域和频域上的分辨率相互牵制，要想使两者的分辨率同时提高，就必须选择适当的小波母函数 $\psi(t)$，使 $\Delta_\psi \cdot \Delta_{\hat{\psi}}$ 小一些。因此

$\psi(t)$和$\hat{\psi}(\omega)$趋向零的速度是衡量小波母函数性质好坏的一个重要标志。

小波变换也有反演公式和巴塞伐尔等式。

定理 2.3 设 $f(t),\ g(t)\in L^2$，则 $(f,\ g)=\frac{1}{C_\psi}(W_f,\ W_g)$，

这里
$$C_\psi=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega。$$

$$(f,\ g)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t。$$

$$(W_f,\ W_g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,\ b)\overline{W_g(a,\ b)}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b。$$

这称为小波变换的巴塞伐尔等式。

证明
$$W_f(a,\ b)=(f,\ \psi_{a,b})=\frac{1}{2\pi}(\hat{f},\ \hat{\psi}_{a,b})$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{ib\omega}\hat{\psi}(a\omega)\mathrm{d}\omega。$$

$$W_g(a,\ b)=\frac{1}{2\pi}\sqrt{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{g}(\omega)\mathrm{e}^{ib\omega}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\mathrm{d}\omega。$$

所以
$$(W_f,\ W_g)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}W_f(a,\ b)\overline{W_g(a,\ b)}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|a|\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{ib\omega}\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\mathrm{d}\omega\cdot\right.$$
$$\left.\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\hat{g}(\omega_1)}\mathrm{e}^{-ib\omega_1}\hat{\psi}(a\omega_1)\mathrm{d}\omega_1\right]\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{ib\omega}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-i\omega_1 b}\hat{\psi}(a\omega_1)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\overline{\hat{g}(\omega_1)}\mathrm{d}\omega_1\right)\mathrm{d}b\right]\cdot\overline{\hat{\psi}(a\omega)}\cdot\frac{1}{|a|}\mathrm{d}a\right\}\hat{f}(\omega)\mathrm{d}\omega$$

因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega_1 b} \hat{\psi}(a\omega_1) \overline{\hat{g}(\omega_1)} d\omega_1$$

$$= F[\hat{\psi}(a\omega_1) \hat{g}(\omega_1)]$$

$$= (F(\hat{\psi}_a \overline{\hat{g}}))(b)。$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega b} F[\hat{\psi}(a\omega_1) \overline{\hat{g}(\omega_1)}] db$$

$$= 2\pi F^{-1}\{F[\hat{\psi}(a\omega_1) \overline{\hat{g}(\omega_1)}]\}$$

$$= 2\pi \hat{\psi}(a\omega) \overline{\hat{g}(\omega)}。$$

代入后可以得到

$$(W_f, W_g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(a\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} \cdot \frac{1}{|a|} da d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}(a\omega) \overline{\hat{\psi}(a\omega)} \frac{1}{|a|} da\right] \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(a\omega)|^2}{|a\omega|} d(a\omega)\right] \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi} C_\psi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)} d\omega$$

$$= C_\psi \cdot \frac{1}{2\pi}(\hat{f}, \hat{g}) = C_\psi (f, g)。$$

如果在巴塞伐尔等式中，令 $g(t) = g_a(t - t_0)$，这里 $g_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{t^2}{4a}}$，显然 $g_a(t - t_0) = g_a(t_0 - t)$。则

$$W_g(a, b) = (g, \psi_{a,b})$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(t_0 - t) \overline{\psi_{a,b}(t)} dt$$

$$= g_a * \overline{\psi_{a,b}}$$

而由狄拉克函数 $\delta(t)$ 的性质知 $\lim\limits_{a\to0^+}(g_a * \overline{\psi_{a,b}}) = \overline{\psi_{a,b}}$。

代入巴塞伐尔等式后就可以得到

$$\lim_{a\to0^+}(f, g) = \lim_{a\to0^+}\frac{1}{C_\psi}(W_f, W_g) = \frac{1}{C_\psi}(W_f, \overline{\psi_{a,b}})$$

同时又有 $\lim\limits_{a\to0^+}(f, g) = \lim\limits_{a\to0^+}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g_a(t_0-t)\mathrm{d}t = \lim\limits_{a\to0^+} f * g_a = f$，

即 $f = \frac{1}{C_\psi}(W_f, \overline{\psi_{a,b}})$，这样就得到了小波变换的反演公式。

定理 2.4 设 $f\in L^2$，$\psi(t)$ 是一个小波母函数，则在 $f(t)$ 的连续点上有

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi}(W_f, \overline{\psi_{a,b}})$$
$$= \frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a, b)\psi_{a,b}(t)\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b。$$

由定理 2.4 可以看出，小波变换也是一种保持信息不丢失的变换，原信号的信息完全保留在变换的象函数中，因此由象函数 $W_f(a, b)$ 可以重建原信号 $f(t)$。

在工程上，很多问题只考虑正频情况，即 $a > 0$，这时只要 $\psi(t)$ 满足 $\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega = \int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega < \infty$，同样有反演公式

$$f(t) = \frac{2}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} W_f(a, b)\psi_{a,b}(t)\mathrm{d}b\right)\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a。$$

这里 $C_\psi = 2\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}\mathrm{d}\omega$。

现在再来分析一下小波母函数的允许性条件：

由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega$ 收敛，当然必有 $\hat{\psi}(0) = 0$，即有

$$\hat{\psi}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t = 0。$$

因此 $\psi(t)$ 的图形在 t 轴的上半部分的面积与 t 轴的下半部分的面积相等，即 $\psi(t)$ 的图形一定是振荡型的，可以把 $\psi(t)$ 看做是具有某种频率特性的"波"。

又因为积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t$ 收敛，当然有 $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t)=0$，这就是说，这种"波"的持续时间较短，这就是"小"的由来，因此"小波"一词指持续时间较短的一种振荡型的函数，工程上也常常称为"子波"，这种"波"不一定像傅里叶变换中的正弦波、余弦波那样有规律，它可能是杂乱无章地趋向于 t 轴，故小波有时又称"凌波"。

这里要注意，由允许性条件可推出 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$，但仅有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$ 还不能推出允许性条件的，如果再加上一个条件：当 $|t|$ 充分大时 $|\psi(t)|\leqslant c\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^{1+\varepsilon}$，这里 c,ε 是大于零的常数，也就是说要求 $\psi(t)$ 有一定的衰减速度。两个条件合在一起可以成为允许性条件的充分条件。

定理 2.5 设 $\psi(t)\in L^2$，如果 $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$，且当 $|t|$ 充分大时 $|\psi(t)|\leqslant c\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^{1+\varepsilon}$，$c,\varepsilon>0$，则 $\psi(t)$ 是一个小波母函数。

证明

$$\begin{aligned}
|\hat{\psi}(\omega)| &= |\hat{\psi}(\omega)-\hat{\psi}(0)| \\
&= \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant c\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^{1+\varepsilon}|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}-1|\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=\omega t} c|\omega|^{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1|}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u \\
&= c|\omega|^{\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}+\int_{1}^{+\infty}\frac{|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}-1|}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}\mathrm{d}u\right) \\
&= I_1+I_2+I_3+I_4,
\end{aligned}$$

因为 $\frac{1}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}<\frac{1}{|u|^{1+\varepsilon}}$，当 $0<|u|<1$ 时，$|e^{-iu}-1|<u$，$1<u<\infty$ 时，$|e^{-iu}-1|\leqslant 2$。

所以

$$I_3=c|\omega|^{\varepsilon}\int_0^1\frac{|e^{iu}-1|}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}du$$

$$\leqslant c|\omega|^{\varepsilon}\int_0^1\frac{u}{u^{1+\varepsilon}}du=O(|\omega|^{\varepsilon})。$$

$$I_4=c|\omega|^{\varepsilon}\int_1^{+\infty}\frac{|e^{iu}-1|}{(|\omega|+|u|)^{1+\varepsilon}}du$$

$$\leqslant c|\omega|^{\varepsilon}\int_1^{+\infty}\frac{2}{u^{1+\varepsilon}}du=O(|\omega|^{\varepsilon})。$$

同理可证 $I_1=O(|\omega|^{\varepsilon})$，$I_2=O(|\omega|^{\varepsilon})$。

所以　$\hat{\psi}(\omega)=O(|\omega|^{\varepsilon})$，即 $\int_{-1}^{1}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega$ 存在。

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega+\int_1^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{-1}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega+\int_1^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega$$

$$\leqslant\int_{-\infty}^{-1}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega+\int_{-1}^{1}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega+\int_1^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\psi}(\omega)|^2d\omega$$

$$=2\pi\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2dt。$$

由于 $\psi(t)\in L^2$，所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2dt$ 收敛。

综上所述，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega$ 收敛。

由于允许性条件判别有时比较困难，而条件 $|\psi(t)|\leqslant$

$c\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^{1+\varepsilon}$ 判别有时相对容易些。所以本书以后的讨论，非特别说明都假定小波母函数 $\psi(t)$ 满足下列条件：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(t)\mathrm{d}t=0$；

(2) $|\psi(t)|\leqslant c\left(\frac{1}{1+|t|}\right)^{1+\varepsilon}$，$c,\varepsilon>0$；

(3) $\psi(t)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 都是窗口函数。

几个小波变换的常用性质：

设 $f(t)\longrightarrow(\omega_\psi f)(a,b)$，

(1) $f(t-t_0)\longrightarrow(\omega_\psi f)(a,b-b_0)$；

(2) $f(a_0t)\longrightarrow\frac{1}{a_0}(\omega_\psi f)(a_0a,a_0b)$；

(3) $\left(\omega_\psi\frac{\partial^m f(t)}{\partial t^m}\right)(a,b)=(-1)^m\frac{1}{\sqrt{|a|}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\frac{\partial^m}{\partial t^m}\overline{[\psi_{a,b}(t)]}\mathrm{d}t$。

三种比较常见的小波母函数：

(1) 哈尔(Haar)小波：

$$\psi(t)=H(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t<\frac{1}{2},\\ -1 & \frac{1}{2}\leqslant t<1,\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$H(t)$ 称为哈尔小波。哈尔小波在时间域上有紧支集，但由于它的光滑性极差，故 $\hat{H}(\omega)$ 的局部性很差。

(2) 香农(Shannon)小波：

$$\psi(t)=\frac{\sin\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)-\sin2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}$$ 称为香农小波。

$\psi(t)$ 在时域上的局部性很差，$\psi(t)=O\left(\frac{1}{t}\right)$，但 $\psi(t)$ 是任意次可导，光

滑性极佳，所以在频域上的局部性极好，由 $F\left[\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right]=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\pi \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 可知 $\hat{\psi}(\omega)$ 有紧支集。

(3) 墨西哥草帽状小波：

取高斯函数 $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$，令 $\psi(t)=-\frac{d^2g(t)}{dt^2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-t^2)e^{-\frac{t^2}{2}}$，则 $\psi(t)$ 是一个小波母函数，由于其图形像一顶草帽（如图 2-4 所示），故称“墨西哥草帽状小波”，其傅里叶变换为 $\hat{\psi}(\omega)=\omega^2e^{-\frac{\omega^2}{2}}$，$\psi(t)$ 和 $\hat{\psi}(\omega)$ 都不具有紧支集，但都有指数衰减的下降速度。

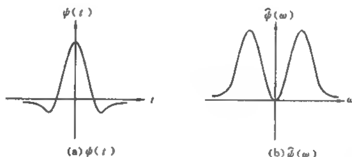


图 2-4

§2.3 连续小波变换的应用举例

问题 在地面上测得的重力异常值 $f(x)$ 是地下多层形状不同的界面包围的不同密度的物质所造成的，设第 i 层物质所造成的重力异常值为 $f_i(x)$，$f(x)=\sum_{i=1}^{N}f_i(x)$。现希望由地面的测量值 $f(x)$ 的数据来提取出 $f_i(x)$。当然，对于这样的问题，如果没有其他的条件，数学上是无法解决的。

根据地质学的一般情况，在浅层界面的 $f_i(x)$，其频谱在高频区域，而深层界面是在低频区域。我们现在作一假定，各界面的频率

区间不重叠，且有一定“间隙”。即假定 $\text{supp}\,\hat{f}_1(\omega)=(\alpha_1,\beta_1)$，$\text{supp}\,\hat{f}_2(\omega)=(\alpha_2,\beta_2)$，…，$\text{supp}\,\hat{f}_N(\omega)=(\alpha_N,\beta_N)$ 且

$$0<\alpha_1<\beta_1<\alpha_2<\beta_2<\cdots<\alpha_N<\beta_N。$$

由于小波变换在时频域的局部性，可以用来进行分频。现在仅需考虑正频的情况，即 $a>0$，这时小波变换的反演公式为 $f(t)=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(\omega_\psi f)(a,b)\overline{\psi_{a,b}(t)}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$，$C_\psi=2\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\infty$。

为说明简单起见，不妨假定 $N=2$，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$。两边作连续小波变换。

$$(\omega_\psi f)(a,b)=(\omega_\psi f_1)(a,b)+(\omega_\psi f_2)(a,b)。$$

由假设 $\text{supp}\,\hat{f}_1(\omega)=(\alpha_1,\beta_1)$，$\text{supp}\,\hat{f}_2(\omega)=(\alpha_2,\beta_2)$，且 $\text{supp}\,\hat{f}_1\cap\text{supp}\,\hat{f}_2=\varnothing$。若我们能找到两个常数 A_1，B_1，$A_1<B_1$，使当 $a\in[A_1,B_1]$ 时，$(\omega_\psi f_2)(a,b)=0$；当 $a\overline{\in}[A_1,B_1]$ 时，$(\omega_\psi f_1)(a,b)=0$。

由连续小波的反演公式

$$\begin{aligned}f_1(x)&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}(\omega_\psi f_1)(a,b)\overline{\psi_{a,b}(x)}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{A_1}^{B_1}(\omega_\psi f_1)(a,b)\overline{\psi_{a,b}(x)}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{A_1}^{B_1}[(\omega_\psi f_1)(a,b)+(\omega_\psi f_2)(a,b)]\overline{\psi_{a,b}(x)}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\\&=\frac{2}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{A_1}^{B_1}(\omega_\psi f)(a,b)\overline{\psi_{a,b}(x)}\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b,\end{aligned}$$

即只要已知 $(\omega_\psi f)(a,b)$，就可以反演出 $f_1(x)$。

现在的问题是这样的 A_1，B_1 能否找到。

选取一个小波母函数 $\psi(x)$，使其傅里叶变换有紧支集。例取

$$\hat{\psi}(\omega)=\begin{cases}e^{\frac{1}{(\omega-1)^2-\frac{1}{p^2}}} & |\omega-1|<\frac{1}{p} \quad p>0,\\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

则 $\operatorname{supp}\hat{\psi}(\omega)=\left[1-\frac{1}{p},1+\frac{1}{p}\right]$，且 $\operatorname{supp}\hat{\psi}_{a,b}(\omega)=\left[\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{p}\right),\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]$。

由于要求当 $a\in[A_1,B_1]$ 时，$(\omega_\psi f_1)(a,b)=(f,\psi_{a,b})=\frac{1}{2\pi}(\hat{f},\hat{\psi}_{a,b})\neq 0$，因此，$\hat{f}_1(\omega)$ 的支集 (α_1,β_1) 与 $\hat{\psi}_{a,b}(\omega)$ 的支集 $\left[\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{p}\right),\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{p}\right)\right]$ 的交集必须非空，即应有

$$\begin{cases}\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{p}\right)<\beta_1,\\ \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{p}\right)>\alpha_1。\end{cases}$$

由此得

$$\begin{cases}a>\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_1},\\ a<\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\alpha_1}。\end{cases}$$

现取 $A_1=\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_1}$，$B_1=\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\alpha_1}$，则

当 $a\in[A_1,B_1]$ 时，$(\omega_\psi f_1)(a,b)=(f,\psi_{a,b})\neq 0$；

当 $a\overline{\in}[A_1,B_1]$ 时，$(\omega_\psi f_1)(a,b)=0$。

接下来的问题是如何选择参数 p，使 $a\in[A_1,B_1]$ 时，$(\omega_\psi f_2)(a,b)=0$。

由于 $(\omega_\psi f_2)(a,b)=\frac{1}{2\pi}(\hat{f}_2,\hat{\psi}_{a,b})$，所以应有 $\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{p}\right)>\beta_2$ 或 $\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{p}\right)<\alpha_2$。因此，当 $a\in[A_1,B_1]=\left[\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_1},\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{1}{\alpha_1}\right]$ 时，

还需使 $\frac{2}{ap} < \alpha_2 - \beta_1$，才能使 $(\omega_p f_2)(a, b) = 0$，即需满足 $a > \left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_1}$，且 $\frac{1}{\beta_1} < \frac{a}{2}(\alpha_2 - \beta_1)$，由此得到不等式 $\frac{1}{p} < \frac{1}{2\beta_1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)(\alpha_2 - \beta_1)$。解此不等式，得 $p > \frac{\alpha_2 + \beta_1}{\alpha_2 - \beta_1}$，即可满足所有要求。

这样，在已知 $\operatorname{supp} \hat{f}_1 = (\alpha_1, \beta_1)$，$\operatorname{supp} \hat{f}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ 且 $\beta_1 < \alpha_2$ 的假定下，就可以由 $f(x)$ 来反演出 $f_1(x)$。

如果 $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_N(x)$，只要取 $A_n = \left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{\beta_n}$，$B_n = \left(1 + \frac{1}{p}\right)\frac{1}{\alpha_n}$，$p = \max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N}\left\{\frac{\alpha_n + \beta_{n-1}}{\alpha_n - \beta_{n-1}}\right\}$，就可以逐层地分离出 $f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_N(x)$。

第三章　离散小波变换和正交小波基

§3.1　离散小波变换

一个 $L^2(0,2\pi)$上的函数 $f(t)$可以展开为一个傅里叶级数 $f(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k e^{ikt}$，令 $\omega(t)=e^{it}$，$\omega_k(t)=e^{ikt}$，定义 $(\omega_k,\omega_l)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\omega_k(t)\cdot\overline{\omega_l(t)}dt$，则 $(\omega_k,\omega_l)=\begin{cases}1 & k=l\\0 & k\neq l\end{cases}$，所以$\{\omega_k(t),k\in\mathbf{Z}\}$是 $L^2(0,2\pi)$的标准正交基，这里 $\mathbf{Z}$ 表示整数全体。这个标准正交基有一个很好的特性，它是由一个函数 $\omega(t)=e^{it}$ 经整数倍的"伸缩" $\omega_k(t)=e^{ikt}$ 而成为标准正交基。

现在考虑 $L^2(\mathbf{R})$中能否存在类似于 $L^2(0,2\pi)$中的由一个函数 $\omega(t)$经伸缩而成为 $L^2(\mathbf{R})$的标准正交基，像这样的标准正交基是非常有用的，任何一个函数都可以按标准正交基展开。正像 $L^2(0,2\pi)$中的傅里叶级数一样，展开系数 $c_k=(f,\omega_k)$。

但 $L^2(\mathbf{R})$与 $L^2(0,2\pi)$有一个很大的差别，作为 $L^2(\mathbf{R})$中的函数 $\psi(t)$，由于$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(t)|^2dt<\infty$，所以 $t\to\infty$时，$\psi(t)$必须较快地趋于零，因此单靠这样一个较快地趋于零的函数 $\psi(t)$的伸缩 $\psi(kt)$是不可能覆盖整个实数轴 $\mathbf{R}$ 的，除了伸缩还必须有平移 $\psi(kt-l)$ 才有可能使一个衰减于零的函数 $\psi(t)$能够覆盖整个实数轴，且成为 $L^2(\mathbf{R})$的基。如果能够找到这样的函数 $\psi(t)$，那么对于 $L^2(\mathbf{R})$中的任意函数 $f(t)$，就有可能把 $f(t)$展开为一个级数 $f(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\sum_{l\in\mathbf{Z}}c_{k,l}\psi(kt-l)$，且展开系数

$c_{k,l}=(f(t),\psi(kt-l))$，这就是小波级数的思想。由于 $\psi(t)$ 具有局部性，所以我们还能够通过这样的小波级数来研究信号的局部区域的特性。

定义 3.1 设 $\psi(t)$ 是一个小波母函数，取定 $a_0>1$，$b_0>0$，记 $\psi_{m,n}(t)=a_0^{\frac{m}{2}}\psi(a_0^m t-nb_0)$，$m$，$n\in\mathbf{Z}$，则称 $\{\psi_{m,n}(t),m,n\in\mathbf{Z}\}$ 为离散小波。又设 $f(t)\in L^2$，$c_f(m,n)=(f,\psi_{m,n})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{\psi_{m,n}(t)}\mathrm{d}t$，称 $f(t)$ 的离散小波变换。

离散小波变换可以看做是：选择一个适当的放大倍数 a_0^m，在由 nb_0 确定的一个特定的位置上来研究一个信号的局部过程。放大倍数可根据需要用 m 加以调节，局部信号的位置则通过 n 来移动。在离散小波中使用最普遍的是 $a_0=2$，$b_0=1$。以后非特别说明，离散小波都是指 $\psi_{m,n}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n)$，$m$，$n\in\mathbf{Z}$。

傅里叶级数 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\mathrm{e}^{ikt}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k(\cos kt+\mathrm{i}\sin kt)$ 是不同频率的正弦波的叠加，而小波 $\psi_{m,n}(t)$ 也是不同频率的波，小波级数 $\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}c_{m,n}\psi_{m,n}(t)$ 是不同频率、不同位置的波的叠加。

$f(t)$ 的连续小波变换是一个二元函数 $\{W_f(a,b)\quad a\neq0,a,b\in\mathbf{R}\}$，它包含了 $f(t)$ 的全部信息，只要已知 $\{W_f(a,b)\quad a\neq0,a,b\in\mathbf{R}\}$，就可以惟一地重建信号 $f(t)$。而 $f(t)$ 的离散小波变换 $\{c_f(m,n),m,n\in\mathbf{Z}\}$ 是一个数列，它所包含的信息要比 $\{W_f(a,b)\quad a\neq0,a,b\in\mathbf{R}\}$ 少得多。形象地说，$W_f(a,b)$ 作为二元函数，是一个定义在 ab 平面上的曲面，而 $c_f(m,n)$ 仅仅是一些点，信息量当然少得多了，那么已知 $\{c_f(m,n),m,n\in\mathbf{Z}\}$ 这些点，是否还能惟一地重建信号 $f(t)$ 呢？这是一个十分重要的问题。

定义 3.2 如果一个连续小波 $\psi_{a,b}(t)$ 经离散化以后得到的一族函数 $\{\psi_{m,n}(t),m,n\in\mathbf{Z}\}$ 是一个标准正交系，即

$$(\psi_{m,n}(t),\psi_{k,l}(t))=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_{m,n}(t)\cdot\overline{\psi_{k,l}(t)}\mathrm{d}t=\delta_{mk}\cdot\delta_{nl}=\begin{cases}1 & m=k \\ & n=l \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

，则称 $\psi(t)$ 是一个正交小波母函数。

$\psi_{m,n}(t)\in L^2(\mathbf{R})$，如果标准正交系$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$能够成为$L^2(\mathbf{R})$的一个标准正交基，那么对任意的$f(t)\in L^2(\mathbf{R})$，就可以惟一地展开为一个级数$f(t)=\sum\limits_{m,n\in\mathbf{Z}}c_{m,n}\psi_{m,n}(t)$。为求出系数$c_{m,n}$，级数两边同与$\psi_{k,l}(t)$作内积得。

$(f,\psi_{k,l})=\sum\limits_{m,n\in\mathbf{Z}}c_{m,n}(\psi_{m,n},\psi_{k,l})=c_{k,l}$，而$(f,\psi_{k,l})$正是$f(t)$的离散小波变换$c_f(k,l)$。

$$f(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}(f,\psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)=\sum_{m,n\in\mathbf{Z}}c_f(m,n)\psi_{m,n}(t)。$$

由此可见，当离散小波$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$构成$L^2$的标准正交基时，由$f(t)$的离散小波变换$\{c_f(m,n),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$，可以惟一地确定$f(t)$，而且$\{c_f(m,n),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$正是$f(t)$在这组基下的"坐标"。

定义 3.3 $\psi(t)$是一个小波母函数，如果$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$构成$L^2$的一个标准正交基，则称$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$是一个正交小波基。

例 3.1 Haar 小波是一个正交小波母函数，$\{H_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$构成$L^2$的一个标准正交基。这个基称为 Haar 基。图 3－1 为 Haar 基的图形。

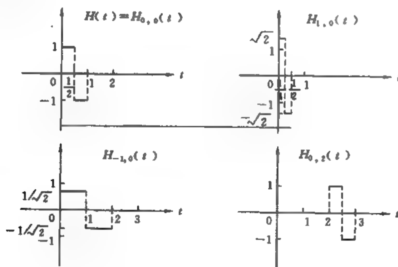


图 3－1

Shannon 小波 $\psi(t)=\dfrac{\sin\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)-\sin2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}$ 也是一个正交小波母函数，$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$是 L^2 的一个标准正交基。但并不是任何一个小波母函数 $\psi(t)$，经伸缩和平移后得到的$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$都能成为 L^2 的标准正交基的。那么 $\psi(t)$满足什么条件才能成为正交小波母函数呢。进一步，如果$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$不能成为 L^2 的标准正交基，那么由离散小波变换$\{c_f(m,\ n),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$能否重建$f(t)$呢？这些问题我们将在下面进行讨论。

§3.2 多分辨分析和取样定理

取样定理是信号分析的重要工具。设$\{f(t_n),\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\}$是一个信号 $f(t)$的一组取样值，如何根据一组取样值来重建 $f(t)$是工程技术领域常常会遇到的问题。数学上有各种插值和拟合的方法，可以由$\{f_n(t)\}$来得到 $f(t)$的近似函数 $g(t)$，但这些近似方法的误差常常难以控制。那么能否由取样值来完全(不是近似!)地重建 $f(t)$呢？Shannon 取样定理在一定的条件下实现了这种重建。

定义 3.4 设 $f(t)\in L^2$，如果存在常数 $b>0$，使 $\operatorname{supp}\hat{f}(\omega)\subset[-b,\ b]$，则称 $f(t)$是 b-频谱有限函数。

b-频谱有限函数全体$\{f(t)\mid f(t)\in L^2$，且 $\operatorname{supp}\hat{f}(\omega)\subset[-b,\ b]\}$记为 B_b，B_b 是L^2 的一个子空间。对任意的 $f(t)\in B_b$，当 $|\omega|\geqslant b$时，有 $\hat{f}(\omega)=0$。

频谱有限函数是工程上应用很广泛的一种函数，当 $|\omega|\geqslant b$ 时，$\hat{f}(\omega)=0$，就意味着 $f(t)$有一个截止频率 b。同时由傅里叶变换的性质可知，由于$\hat{f}(\omega)$有紧支集，所以 $f(t)$一定是连续函数。

定理 3.1(Shannon 定理) 设 $f(t)\in B_b$，当取样间隔 $h\leqslant\frac{\pi}{b}$ 时，有

$f(t) = \sum_{n\in \mathbf{Z}} f(nh)s(t-nh)$，这里

$$s(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin\frac{\pi}{h}t}{\frac{\pi}{h}t} & t \neq 0, \\ 1 & t = 0。\end{cases}$$

这个公式可以看做是一个以 $s(t)$ 为基函数的等距结点的插值公式。这个基函数 $s(t)$ 又称为 Shannon 函数。

证明 取 $g(t)\in L^2$，且当 $|t|>b$ 时，$g(t)=0$。

把 $g(t)$ 作周期 $T=\frac{2\pi}{h}$ 的周期延拓得到 $g_T(t)$，并把 $g_T(t)$ 展开为傅里叶级数，$g_T(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{in\omega t}$，$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t)e^{-in\omega t}dt$。

由于 $h\leqslant\frac{\pi}{b}$，即 $b\leqslant\frac{\pi}{h}$，当 $|t|\geqslant\frac{\pi}{h}$ 时，有 $g(t)=0$，而 $\omega=\frac{2\pi}{T}=h$，所以

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t)e^{-in\omega t}dt \\ &= \frac{h}{2\pi}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g_T(t)e^{-in\omega t}dt \\ &= \frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-inht}dt \\ &= \frac{h}{2\pi}\hat{g}(nh)。\end{aligned}$$

代入傅里叶展开式得到

$$\begin{aligned} g_T(t) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n e^{in\omega t} \\ &= \sum_{n\in\mathbf{Z}}\left[\frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-inht}dt\right]e^{inht} \end{aligned}$$

$$= \frac{h}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(nh) e^{inhr}。$$

根据傅里叶变换的性质，对于 $g(\omega)$ 必存在 $f(t) \in L^2$，使 $\hat{f}(\omega) = g(\omega)$，且 $F[\hat{f}(\omega)] = 2\pi f(-t)$。

令
$$X_{[-b,b]}(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leqslant b, \\ 0 & |\omega| > b, \end{cases}$$

则
$$g(\omega) = g_T(\omega) X_{[-b,b]}(\omega)。$$

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\omega) = g(\omega) &= g_T(\omega) X_{[-b,b]}(\omega) \\
&= \left(\frac{h}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{g}(nh) e^{inh\omega} \right) X_{[-b,b]}(\omega) \\
&= \left(\frac{h}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\hat{f}}(nh) e^{inh\omega} \right) X_{[-b,b]}(\omega) \\
&= \left(\frac{h}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2\pi f(-nh) e^{inh\omega} \right) X_{[-b,b]}(\omega) \\
&= \left(h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) e^{-ikh\omega} \right) X_{[-b,b]}(\omega)。
\end{aligned}$$

在等式两边作傅里叶逆变换，得

$$\begin{aligned}
f(t) &= h \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikh\omega} X_{[-b,b]}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\
&= \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \int_{-b}^{b} e^{i(t-kh)\omega} d\omega \\
&= \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \frac{1}{i(t-kh)} \left[e^{i(t-kh)b} - e^{-i(t-kh)b} \right] \\
&= \frac{h}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(kh) \frac{\sin b(t-kh)}{(t-kh)},
\end{aligned}$$

取 $b = \frac{\pi}{h}$ 得

$$f(t) = \sum_{k\in \mathbf{Z}} f(kh) \frac{\sin\frac{\pi}{h}(t-kh)}{\frac{\pi}{h}(t-kh)}。$$

Shannon 定理给出了频谱有限函数与其离散值之间的关系。

定义 3.5　$f(t)$，$g(t)\in L^2$，$\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}} f(nh)\overline{g(nh)}$称为 $f(t)$，$g(t)$的离散内积。记为 $\langle f, g\rangle^* = \sum\limits_{n\in \mathbf{Z}} f(nh)\overline{g(nh)}$。

下面的定理给出了频谱有限函数的内积与离散内积之间的关系。

定理 3.2　设 $f(t)$，$g(t)\in B_b$，则当 $h\leqslant \frac{\pi}{b}$ 时，

$(f, g) = h\langle f, g\rangle^*$，即$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}\mathrm{d}t = h\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}} f(nh)\overline{g(nh)}$。

Shannon 取样定理还可以作一些推广。

定义 3.6　设 $f(t)\in L^2$，如果对于常数 $b>0$，存在 $\varepsilon>0$，使 $\int_{|\omega|\geqslant b} |\hat{f}(\omega)|\mathrm{d}\omega < \varepsilon$，则称 $f(t)$是一个本质频谱有限函数。

对本质频谱有限函数，有如下定理。

定理 3.3　$f(t)$是本质频谱有限函数，则当取样间隔 $h\leqslant \frac{\pi}{b}$ 时，

$$\left| f(t) - \sum_{n\in \mathbf{Z}} f(nh) \frac{\sin\frac{\pi}{h}(t-nh)}{\frac{\pi}{h}(t-nh)} \right| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{(-\infty,-\frac{\pi}{h})\cup(\frac{\pi}{h},+\infty)} |\hat{f}(\omega)|\mathrm{d}\omega$$

$\leqslant \frac{\varepsilon}{\pi}$。

取样定理还有其他各种形式。

20 世纪 80 年代，由 Meyer 和 Mallat 提出的多分辨分析，既与正交小波基有密切的关系，又与取样定理有密切的关系。

定义 3.7　设 V_m，$m\in \mathbf{Z}$ 是一列 L^2 的闭的线性子空间，函数 $\varphi(t)\in L^2$，如果满足条件：

(1) $V_m \subset V_{m+1}$，对任意的 $m\in \mathbf{Z}$ 成立；

(2) $f(t)\in V_m \Leftrightarrow f(2t)\in V_{m+1}$；

(3) $\bigcap_{m\in\mathbf{Z}} V_m=\{\theta\}$，$\overline{\bigcup_{m\in\mathbf{Z}} V_m}=L^2$；

(4) $\varphi(t)\in V_0$，且$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$是 V_0 的一个 Riesz 基。则称$\{V_m,\ m\in\mathbf{Z}\}$和 $\varphi(t)$是一个多分辨分析。$\varphi(t)$称这个多分辨分析的尺度函数或父函数。

如果$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$是 V_0 的一个标准正交基，那么称$\{V_m,\ m\in\mathbf{Z}\}$和 $\varphi(t)$是一个正交多分辨分析。由于 Riesz 基和标准正交基可以相互转换，所以以后我们都假定$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$是标准正交基，正交多分辨分析也就称多分辨分析。

例 3.2 取 $V_0=B_\pi$，即 π-频谱有限函数，$V_m=B_{2^m\pi}$，这样的 V_m 显然满足多分辨分析条件的(1)、(2)、(3)。

取 $\varphi(t)=\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$，并记 $\varphi_m(t)=\varphi(t-n)$，则

$$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases},\ (\varphi_m,\varphi_n)=\frac{1}{2\pi}(\hat{\varphi}_m,\hat{\varphi}_n)$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\omega},\hat{\varphi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega})$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\omega}\mathrm{d}\omega=\delta_{mn}。$$

所以$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$是一个标准正交系，要说明它还是 V_0 的一个标准正交基，还要证明对任意的 $f(t)\in V_0$，$f(t)$可以表示为$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$的一个级数形式，$f(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n\varphi(t-n)$。

在取样定理中，取 $h=1$，由于 $f(t)\in B_\pi$，所以有

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(n)\varphi(t-n)。$$

所以$\{B_{2^m\pi},\ m\in\mathbf{Z}\}$和$\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$是一个多分辨分析。

一个多分辨分析的关键是尺度函数 $\varphi(t)$，有了尺度函数就可以生成 L^2 的一列子空间$\{V_m,\ m\in\mathbf{Z}\}$。当然并非 L^2 中的任一函数都可以作为尺度函数的，关键是一个函数 $\varphi(t)$的整数平移$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$要

成为一个标准正交系。

定理 3.4 记 $\varphi_{n}(t)=\varphi(t-n)$，$\{\varphi_{n}(t), n\in \mathbf{Z}\}$ 是标准正交系的充分必要条件是 $\sum_{n\in \mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^{2}\equiv 1$。

证明 记 $F(\omega)=\sum_{k\in \mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^{2}$，显然 $F(\omega)$ 是以 2π 为周期的周期函数。

$\hat{\varphi}_{n}(\omega)=\mathrm{e}^{-in\omega}\hat{\varphi}(\omega)$，由 Parseval 等式

$$
\begin{aligned}
(\varphi_{n}, \varphi_{m}) &= \frac{1}{2\pi}(\hat{\varphi}_{n}, \hat{\varphi}_{m}) \\
&= \frac{1}{2\pi}(\mathrm{e}^{-in\omega}\hat{\varphi}(\omega), \mathrm{e}^{-im\omega}\hat{\varphi}(\omega)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{i(m-n)\omega}|\hat{\varphi}(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\mathrm{e}^{i(m-n)\omega}|\hat{\varphi}(\omega)|^{2}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{e}^{i(m-n)\omega}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^{2}\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{e}^{i(m-n)\omega}F(\omega)\mathrm{d}\omega。
\end{aligned}
$$

显然 $(\varphi_{n}, \varphi_{m})=\delta_{nm}$ 的充要条件是

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{e}^{i(m-n)\omega}F(\omega)\mathrm{d}\omega=\delta_{nm}\Leftrightarrow F(\omega)\equiv 1。
$$

例 3.3 设 $\varphi(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$，则 $\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\pi \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，

显然 $\sum_{k\in \mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^{2}\equiv 1$，所以 $\{\varphi(t-n), n\in \mathbf{Z}\}$ 是一个标准正交系。

例 3.4 取 $\varphi(t)$ 为零次 B 样条 $N_{1}(t)=\begin{cases}1 & 0\leqslant t<1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，则

$\hat{\varphi}(\omega)=\dfrac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}=\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{-i\frac{\omega}{2}}$，根据复变函数的知识，有 $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{(z+k\pi)^2}=\dfrac{1}{\sin^2 z}$，这里 z 是一个复数。所以 $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=$ $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin\left(\frac{\omega+2k\pi}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}+k\pi}\right|^2\left|e^{-i\frac{\omega+2k\pi}{2}}\right|^2=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}{\frac{\omega}{2}+k\pi}\right|^2=\sin^2\dfrac{\omega}{2}\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^2}=\sin^2\dfrac{\omega}{2}\cdot\dfrac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}=1$。所以 $\{\varphi(t-n),n\in\mathbf{Z}\}$ 是标准正交系。

例 3.5 取 $\varphi(t)$ 为一次 B 样条

$$N_2(t)=(N_1*N_1)(t)=\begin{cases}t & 0\leqslant t<1\\ 2-t & 1\leqslant t<2,\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

则 $\hat{\varphi}(\omega)=(\hat{N}_1(\omega))^2=\left[\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{-i\frac{\omega}{2}}\right]^2=\dfrac{\sin^2\frac{\omega}{2}}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^2}e^{-i\omega}$。

由复变函数的知识，有

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z+k\pi)^4}=\frac{1}{(\sin z)^4}-\frac{2}{3}\frac{1}{(\sin z)^2},$$

所以 $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\left|\dfrac{\sin^2\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^2}\right|^2$

$$=\sin^4\frac{\omega}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^4}=\sin^4\frac{\omega}{2}\left[\frac{1}{\sin^4\frac{\omega}{2}}-\frac{2}{3}\frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}\right]$$

$$= 1 - \frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}。$$

因此，$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega + 2k\pi)|^2$ 不恒等于1。

$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$不是标准正交系。

定理 3.5 如果$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$是标准正交系，则$\{2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$也是标准正交系。

证明 记 $\varphi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t - n)$，则 $\hat{\varphi}_{m,n}(\omega) = 2^{-\frac{m}{2}}e^{-i\frac{n}{2^m}\omega}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)$。

$$(\varphi_{m,n}, \varphi_{m,k}) = \frac{1}{2\pi}(\hat{\varphi}_{m,n}, \hat{\varphi}_{m,k})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(2^{-\frac{m}{2}}e^{-i\frac{n}{2^m}\omega}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right),\ 2^{-\frac{m}{2}}e^{-i\frac{k}{2^m}\omega}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)\right)$$

$$= \frac{2^{-m}}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-n)\frac{\omega}{2^m}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)\right|^2 d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-n)\frac{\omega}{2^m}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)\right|^2 d\left(\frac{\omega}{2^m}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-n)\omega'}|\hat{\varphi}(\omega')|^2 d\omega'。$$

因为$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$是标准正交系，由定理 3.4 可知

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-n)\omega}|\hat{\varphi}(\omega)|^2 d\omega = \delta_{n,k}。$$

所以 $(\varphi_{m,n}, \varphi_{m,k}) = \delta_{nk}$。

例 3.6 设 $\varphi(t) = \frac{\sin\pi t}{\pi t}$，$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 $V_0 = B_\pi$ 的标准正交基。由定理 3.5，$\left\{\sqrt{2}\frac{\sin 2\pi\left(t-\frac{n}{2}\right)}{2\pi\left(t-\frac{n}{2}\right)},\ n\in\mathbf{Z}\right\}$也是标准正交系，

且 $$\overline{\mathrm{span}\left\{\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)},\ n\in\mathbf{Z}\right\}} = V_0 = B_\pi。$$

$$\overline{\mathrm{span}\left\{\sqrt{2}\,\frac{\sin 2\pi\left(t-\frac{n}{2}\right)}{2\pi\left(t-\frac{n}{2}\right)},\ n\in\mathbf{Z}\right\}}=V_1=B_{2\pi}。$$

更一般地，$\overline{\mathrm{span}\left\{2^{\frac{m}{2}}\,\frac{\sin 2^m\pi\left(t-\frac{n}{2^m}\right)}{2^m\pi\left(t-\frac{n}{2^m}\right)},\ n\in\mathbf{Z}\right\}}=V_m=B_{2^m\pi}$。

由此可见，一个多分辨分析的构造，关键在于尺度函数 $\varphi(t)$，只要 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 能够成为标准正交系，那么它的生成空间的闭包 $\overline{\mathrm{span}\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}}$ 可以作为基本子空间 V_0，以此为基础就可以作出 $V_m=\overline{\mathrm{span}\{2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}}$，且 $\{2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 就是 V_m 的标准正交基。这样一个尺度函数就能生成一个多分辨分析。

定理 3.6 如果 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基，令 $\hat{\varphi}^*(\omega)=\dfrac{\hat{\varphi}(\omega)}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$，则 $\hat{\varphi}^*(\omega)$ 的傅里叶逆变换 $\varphi^*(t)$ 的整数平移集 $\{\varphi^*(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基。

公式 $\hat{\varphi}^*(\omega)=\dfrac{\hat{\varphi}(\omega)}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$ 称为正交化公式。

证明
$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}^*(\omega+2k\pi)|^2=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left\{\frac{|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2}{\sum\limits_{l\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi+2l\pi)|^2}\right\}$$
$$=\frac{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2}{\sum\limits_{m\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2m\pi)|^2}\equiv 1。$$

这里 $m=k+l$。

例 3.7 由例 3.5 已知，当 $\varphi(t)=N_2(t)$ 时，$\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 不是标准正交系，现可以把 $N_2(t)$ 正交化。

令
$$\hat{\varphi}^*(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$$
$$=\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}}}e^{-i\omega}。$$

对$\hat{\varphi}^*(\omega)$作傅里叶逆变换，

$$\varphi^*(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}}}e^{-i\omega}\cdot e^{i\omega t}d\omega,$$

那么$\{\varphi^*(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$就是一个标准正交系。

现在再来分析 Shannon 取样定理。我们考虑π-频谱有限函数B_π，现将取样间隔取为$h=1$，Shannon 定理的关键在于构造了一个基函数$s(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$，这个基函数的整数平移$\{s(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$构成了$B_\pi$的一个标准正交基，这样对于任意的$f(t)\in B_\pi$，有$f(t)=\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}}f(n)s(t-n)$。

再把空间扩大到$2^m\pi$-频谱有限函数$B_{2^m\pi}$，由例 3.6 可知$\left\{2^{\frac{m}{2}}\frac{\sin 2^m\pi\left(t-\frac{n}{2^m}\right)}{2^m\pi\left(t-\frac{n}{2^m}\right)}, n\in\mathbf{Z}\right\}$是$B_{2^m\pi}$的标准正交基，根据 Shannon 定理，$h\leqslant\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2^m\pi}=\frac{1}{2^m}$，现取$h=\frac{1}{2^m}$，则对任意的$f(t)\in B_{2^m\pi}$有

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f\left(\frac{n}{2^m}\right)s_{m,n}(t),\text{这里 } s_{m,n}(t)=2^{\frac{m}{2}}\frac{\sin 2^m\pi\left(t-\frac{n}{2^m}\right)}{2^m\pi\left(t-\frac{n}{2^m}\right)}。$$

取样定理等式的右边，是一个级数，这个级数的收敛速度，对于计算极其重要。这个级数收敛速度越快，计算量越小，精度越高。

Shannon取样定理的收敛速度是一阶。那么除了$\dfrac{\sin\frac{\pi}{h}t}{\frac{\pi}{h}t}$以外，是否还能找到另外的基函数 $s(t)$，产生新的取样定理 $f(t)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}f(nh)s(t-nh)$ 呢？

一个函数要能成为取样定理的基函数，首先要求这个函数具有平移正交性，使这个函数的平移函数族 $\{s(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}$ 成为某个子空间的标准正交基。而多分辨分析中的尺度函数 $\varphi(t)$恰好满足这个要求，那么能否把尺度函数作为取样定理中的基函数呢？

尺度函数的平移 $\{\varphi(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}$ 能够构成 L^2 的子空间 V_0 的标准正交基，对 V_0 中的任一函数 $f(t)$，可按标准正交基展开 $f(t)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}c_n\varphi(t-n)$，而展开系数 $c_n=(f,\ \varphi_{0n})$，但问题是 c_n 不一定就是 $f(n)$，而对取样定理中的基函数 $s(t)$，除了要求具有平移正交系以外，还要求满足 $(f(t),\ s(t-n))=f(n)$，这样的展开式 $f(t)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}(f(t),\ s(t-n))s(t-n)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}f(n)s(t-n)$，才能成为取样定理。所以一般情况下，尺度函数还不能成为取样定理中的基函数。

为了要使 $c_n=(f(t),\ s(t-n))=f(n)$，$s(t)$ 不仅要满足平移正交性，还要满足离散正交性，即 $s(m-n)=\delta_{mn}$，$m,\ n\in \mathbf{Z}$，这样 $f(t)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}c_ns(t-n)$ 当 $t=m$ 时，有 $f(m)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}c_ns(m-n)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}c_n\delta_{mn}=c_m$。函数 $\dfrac{\sin\pi t}{\pi t}$ 就是既满足平移正交性，又满足离散正交性 $\dfrac{\sin\pi(m-n)}{\pi(m-n)}=\delta_{mn}$。

那么多分辨分析的尺度函数能否改造为取样定理的基函数呢？

设 V_0 是 L^2 的一个子空间，考虑 V_0 中的取样定理，$\varphi(t)$是尺度函数，现在希望在 V_0 中找一个基函数 $s(t)$。由于 $s(t)\in V_0$，故有 $s(t)=\sum\limits_{n\in \mathbf{Z}}a_n\varphi(t-n)$，$\{a_n\}\in l^2$，对数列$\{a_n\}$和$\{s(k),\ k\in \mathbf{Z}\}$分别作离散傅里叶变换，得

$$\hat{a}^*(\omega) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{in\omega},\ \hat{s}^*(\omega) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} s(k)e^{ik\omega}。$$

由 $s(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\varphi(t-n)$，得 $s(k) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\varphi(k-n)$，

$$\begin{aligned}\hat{s}^*(\omega) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\varphi(k-n)\Big)e^{ik\omega}\\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{in\omega}\Big)\varphi(k-n)e^{i(k-n)\omega}\\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}(\hat{a}^*(\omega))\varphi(k-n)e^{i(k-n)\omega}\\ &= \hat{a}^*(\omega)\,\hat{\varphi}^*(\omega)。\end{aligned}$$

其中$\hat{\varphi}^*(\omega)$是$\{\varphi(m),\ m\in\mathbf{Z}\}$的离散傅里叶变换。

由于要求 $s(t)$ 具有离散正交性 $s(m-n)=\delta_{mn}$，所以对整数 k，$s(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}$，这就是说，离散正交性的条件等价于 $\hat{s}^*(\omega) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} s(k)e^{ik\omega} \equiv 1$，即 $\hat{s}^*(\omega) = \hat{a}^*(\omega)\,\hat{\varphi}^*(\omega) \equiv 1$，$\hat{a}^*(\omega) = \dfrac{1}{\hat{\varphi}^*(\omega)}$，$\hat{\varphi}^*(\omega)\neq 0$。

由于 $\varphi(t)$ 是已知的，$\hat{\varphi}^*(\omega)$ 当然也是已知的，这样就求得了 $\hat{a}^*(\omega)$，进而得到$\{a_n\}$，由 $s(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\varphi(t-n)$ 也就求得了 $s(t)$。但有时由$\hat{a}^*(\omega)$求$\{a_n\}$很困难，也可以采用另一种方法。

对 $s(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\varphi(t-n)$ 两边作傅里叶变换，得

$$\begin{aligned}\hat{s}(\omega) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n e^{-in\omega}\,\hat{\varphi}(\omega)\\ &= \hat{a}^*(-\omega)\,\hat{\varphi}(\omega)\\ &= \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}^*(-\omega)}。\end{aligned}$$

$\hat{\varphi}(\omega)$和$\hat{\varphi}^*(-\omega)$都可由 $\varphi(t)$求得，这样就得到了$\hat{s}(\omega)$，对$\hat{s}(\omega)$再

作傅里叶逆变换，即可求得 $s(t)$。

上面的叙述归结为一个定理，就是

定理 3.7 $\{V_m, m\in \mathbf{Z}\}$，$\varphi(t)$是一个多分辨分析，且满足：

(1) 当$|t|\to\infty$时，$\varphi(t) = O\left(\frac{1}{|t|^{1+\varepsilon}}\right)$；$\varepsilon > 0$；

(2) $\hat{\varphi}^*(\omega) = \sum_{n\in Z}\varphi(n)e^{in\omega} \neq 0$；$-\infty < \omega < +\infty$。

则存在 $s(t)\in V_0$，满足：

(1) $\{s(t-n), n\in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基或 Riesz 基；

(2) $s(m-n) = \delta_{mn}$；

(3) 对任意的 $f(t)\in V_0$，$f(t) = \sum_{n\in Z}f(n)s(t-n)$，且等式右边的级数是一致收敛。

这里，如果尺度函数的整数平移 $\{\varphi(t-n), n\in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基，则 $\{s(t-n), n\in \mathbf{Z}\}$ 也是 Riesz 基，如果 $\{\varphi(t-n), n\in \mathbf{Z}\}$ 是标准正交基，则 $\{s(t-n), n\in \mathbf{Z}\}$ 也是标准正交基。

例 3.8 设 V_0 是每一整数区间上的线性的平方可积函数全体。取一次 B 样条 $N_2(t)$作为尺度函数 $\varphi(t) = \begin{cases} t & 0\leqslant t<1 \\ 2-t & 1\leqslant t<2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$，现由 $\varphi(t)$来构造 $s(t)$。因为 $\text{supp}\varphi(t) = [0, 2]$，且 $\varphi(0) = 0$，$\varphi(1) = 1$，$\varphi(2) = 0$，所以离散傅里叶变换 $\hat{\varphi}^*(\omega) = \sum_{n\in Z}\varphi(n)e^{in\omega} = e^{i\omega}$，$\hat{a}^*(\omega) = \frac{1}{\hat{\varphi}^*(\omega)} = e^{-i\omega}$，即 $\hat{a}^*(\omega) = \sum_{n\in Z}a_n e^{in\omega} = e^{-i\omega}$，所以可以得到 $a_{-1} = 1$，$a_i \neq 0$，$i\neq -1$，这样就得到了 $s(t) = \sum_{n\in Z}a_n\varphi(t-n) = a_{-1}\varphi(t+1) = \varphi(t+1) = N_2(t+1)$。

在这个例子中，由于$\{a_n\}$特别简单，所以可以通过直接求出$\{a_n\}$后，由 $s(t) = \sum_{n\in Z}a_n\varphi(t-n)$ 得到 $s(t)$。但在很多情况下$\{a_n\}$很难求，这时只能通过 $\hat{s}(\omega) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}^*(-\omega)}$，然后作傅里叶逆变换来求得 $s(t)$。

例 3.9 取二次 B 样条 $N_3(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0\leqslant t<1\\ \frac{3}{4}-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 & 1\leqslant t<2\\ \frac{1}{2}(t-3)^2 & 2\leqslant t<3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$ 作为尺度函数，由于 $\operatorname{supp}N_3(t)=[0,3)$，且 $\varphi(0)=0$，$\varphi(1)=\frac{1}{2}$，$\varphi(2)=\frac{1}{2}$，所以 $\hat{\varphi}^*(\omega)=\sum_{n\in Z}\varphi(n)e^{in\omega}=\frac{1}{2}e^{i\omega}+\frac{1}{2}e^{i2\omega}$，而 $\omega=\pi$ 时，$\hat{\varphi}^*(\pi)=0$，所以不满足定理 3.7 的条件，因而不能构造相应的 $s(t)$。

例 3.10 取三次 B 样条 $N_4(t)$ 作为尺度函数 $\varphi(t)$，$\hat{\varphi}^*(\omega)=\sum_{n\in Z}\varphi(n)e^{in\omega}=\frac{1}{6}e^{i\omega}+\frac{2}{3}e^{i2\omega}+\frac{1}{6}e^{i3\omega}$，$\hat{\varphi}^*(\omega)\neq 0$。这里要根据 $\sum_{n\in Z}a_n e^{in\omega}=\frac{1}{\hat{\varphi}^*(\omega)}$ 来求出 $\{a_n\}$ 很困难，所以只能通过 $\hat{s}(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}^*(-\omega)}$ 求傅里叶逆变换来得到 $s(t)$：

$$\hat{\varphi}(\omega)=(N_3\hat{*}N_1)(\omega)=[\hat{N}_1(\omega)]^4=\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^4 e^{-i2\omega},$$

$$\hat{s}(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}^*(-\omega)}=\frac{b\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^4}{\left(\frac{\omega}{2}\right)^4(e^{i\omega}+4+e^{-i\omega})}.$$

然后通过傅里叶逆变换求得 $s(t)$。

用这种方法求 $s(t)$ 在作傅里叶逆变换时，一般比较困难，只能通过近似的方法来求。

对于任何一种取样定理 $f(t)=\sum_{n\in Z}f(nh)s(t-nh)$ 来说，右边的级数收敛得越快越好。收敛得快，意味着同样的精度要求下，取的项数

可以减少。要使这个级数收敛得快，关键就是要基函数 $s(t)$ 衰减得快，即 $s(t)$ 的局部性好。Shannon 函数 $s(t)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{h}t}{\frac{\pi}{h}t}$ 的分母是 t 的一次幂，因而收敛不快。

现在构造一个函数 $s_N(t)$，满足：

(1) $s_N(t)=O(|t|^{-N})$，$t\to\infty$ 时；

(2) $\{s_N(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是标准正交系；

(3) $s_N(t)$ 满足离散正交性 $s_N(m-n)=\delta_{mn}$，$m,n\in\mathbf{Z}$。

现以 $N=2$ 为例，来构造这样的函数 $s_2(t)$。

定理 3.8（改进的取样定理） 设 $f(t)$ 是 b-频谱有限函数，则当取样间隔 $h<\dfrac{\pi}{b}$ 时，有

$$f(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(nh)\frac{\sin\frac{\pi}{h}(t-nh)\sin\beta(t-nh)}{\frac{\pi}{h}\beta(t-nh)^2}=\sum_{n\in\mathbf{Z}}f(nh)s_2(t-nh),$$

这里 $\beta=\dfrac{\pi}{h}-b>0$，当 $t=nh$ 时，定义 $s_2(t)=1$。

证明 令 $T=\dfrac{2\pi}{h}=2(b+\beta)$，以 T 为周期对 $\hat{f}(\omega)$ 作周期延拓得 $\hat{f}_T(\omega)$，并将 $\hat{f}_T(\omega)$ 展开为傅里叶级数，得

$$\hat{f}_T(\omega)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n e^{in\omega\xi}，其中\ \xi=\frac{2\pi}{T}=h,$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\hat{f}_T(\omega)e^{-in\omega\xi}d\omega。$$

由于 $\dfrac{T}{2}=b+\beta>b$，所以，当 $|\omega|>\dfrac{T}{2}$ 时，$\hat{f}(\omega)=0$，

故
$$c'_n=\frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{-in\omega\xi}d\omega$$

$$= \frac{h}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(-nh)}\mathrm{d}\omega$$

$$= hf(-nh)。$$

代人傅里叶展开式得 $\hat{f}_T(\omega) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} hf(-nh)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega h}$。

$$令\ \hat{g}(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2\beta}(\omega + b + 2\beta) & \omega \in (-b-2\beta, -b), \\ 1 & \omega \in [-b, b], \\ -\frac{1}{2\beta}(\omega - b - 2\beta) & \omega \in (b, b+2\beta), \\ 0 & 其他。\end{cases}$$

$$\hat{f}(\omega) = \hat{f}_T(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$$

$$= h\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(-nh)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega h}\,\hat{g}(\omega).$$

两边作傅里叶逆变换,得

$$f(t) = \frac{h}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(-nh)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\omega h}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{h}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(-nh)\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(t+nh)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$= h\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(-nh)g(t+nh)$$

$$= h\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(kh)g(t-kh),$$

且由于 $g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{g}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$

$$= \frac{1}{2\pi}\Big[\int_{-b-2\beta}^{-b} \frac{1}{2\beta}(\omega + b + 2\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega + \int_{-b}^{b}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega +$$

$$\int_{b}^{b+2\beta} -\frac{1}{2\beta}(\omega - b - 2\beta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\Big]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{-1}{\mathrm{i}t} \left[\int_{-b-2\beta}^{-b} \frac{1}{2\beta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega - \int_{b}^{b+2\beta} \frac{1}{2\beta} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} \mathrm{d}\omega \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2\beta t^2} \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tb} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(b+2\beta)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t(b+2\beta)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}tb} \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\beta t^2} [\cos tb - \cos t(b + 2\beta)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\beta t^2} \sin t\beta \cdot \sin t(b + \beta)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{\beta t^2} \sin t\beta \cdot \sin\left(t \frac{\pi}{h}\right),$$

这就得到 $$f(t) = h \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kh) g(t - kh)$$

$$= \frac{h}{\pi\beta} \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(kh) \frac{\sin\beta(t - kh) \cdot \sin\frac{\pi}{h}(t - kh)}{(t - kh)^2}$$

$$= \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(nh) \frac{\sin\beta(t - nh) \sin\frac{\pi}{h}(t - nh)}{\beta \cdot \frac{\pi}{h}(t - nh)^2}.$$

这个改进取样定理的收敛速度比 Shannon 取样定理高一阶，但在同样的一个子空间 B_b 中，Shannon 定理的取样间隔要求 $h \leqslant \frac{\pi}{b}$，而改进取样定理要求取样间隔 $h < \frac{\pi}{b}$，需要有一点“空隙” $\beta = \frac{\pi}{h} - b$。

类似地，可构造 $N = 3$ 的取样定理。

定理 3.9 设 $f(t) \in B_b$，则当 $h < \frac{\pi}{b}$ 时，有

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f(nh) \frac{\sin^2\left[\frac{\beta}{2}(t - nh)\right] \sin\frac{\pi}{h}(t - nh)}{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \frac{\pi}{h}(t - nh)^3},$$

这里 $\beta = \frac{\pi}{h} - b > 0$。

§3.3 正交小波基

正交小波基有很好的性质，它是由一个小波母函数经伸缩和平移$\{\psi_{m,n}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n),\ m,n\in \mathbf{Z}\}$，构成 L^2 的一个标准正交基。

用多分辨分析来构造正交小波基是一种很有效的方法，该方法的主要思想是对 L^2 作正交分解，$L^2=\bigoplus\limits_{k\in Z}W_k$，$W_k\perp W_l \quad k\neq l$，在每一个子空间 W_k 上构造标准正交基$\{\psi_{k,n}(t),\ n\in \mathbf{Z}\}$，则$\bigcup\limits_{k\in Z}\{\psi_{k,n}(t),\ n\in \mathbf{Z}\}=\{\psi_{k,n}(t),\ k,\ n\in \mathbf{Z}\}$就构成 L^2 的标准正交基。

先来看上一节提到过的例子。$V_m=B_{2^m\pi}$，$m\in \mathbf{Z}$，$\overline{\bigcup\limits_{m\in Z}V_m}=L^2$，$\varphi(t)=\dfrac{\sin \pi t}{\pi t}$，$\{V_m\}$和$\varphi(t)$构成一个正交多分辨分析。$\{\varphi(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基，由定理 3.5，$\{\varphi_{m,n}(t),\ n\in \mathbf{Z}\}$是 V_m 的标准正交基，那么$\{\varphi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$是否构成 L^2 的标准正交基呢?

回答是否定的。因为 $m\neq k$ 时，V_m 和 V_K 不是相互正交的子空间，$\{V_m\}$不是 L^2 的正交分解。即对固定的 m，$(\varphi_{m,n},\ \varphi_{m,l})=\delta_{nl}$，但对不同的 m 和 m'，$\varphi_{m,n}$和$\varphi_{m',n}$不是相互正交的，所以$\{\varphi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$不能构成标准正交基。所以尺度函数的伸缩和平移不是正交小波基，即使尺度函数满足小波的允许性条件。

现在我们从正交多分辨分析出发，经适当的处理来得到正交小波基。

设$\{V_m,\ m\in \mathbf{Z}\}$，$\varphi(t)$是一个正交多分辨分析。由于$\varphi(t)\in V_0\subset V_1$，而$\{\sqrt{2}\varphi(2t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}$是 V_1 的标准正交基，所以$\varphi(t)=\sum\limits_{n\in Z}p_n\varphi(2t-n)$，这个等式反映了两个尺度 $\varphi(t)$和 $\varphi(2t)$之间的关系，称之为双尺度方程。数列$\{p_n\}$反映了两个尺度 $\varphi(t)$和 $\varphi(2t)$的联系，称为双尺度序列。由于 $V_1\subset L^2$，所以$\{p_n\}\in l^2$。

对双尺度方程两边作傅里叶变换，得

$\hat{\varphi}(\omega)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n\in Z}p_n e^{-i\frac{n}{2}\omega}\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$，记 $P(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n\in Z}p_n z^n$，这里 z 是一

个复数，$P(z)$称为双尺度符号。

再记 $H(\omega)=P(e^{-i\omega})=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_n e^{-in\omega}$，显然 $H(\omega)$是以 2π 为周期的周期函数，且有 $\hat{\varphi}(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$。

定理 3.10 设 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是标准正交系，则 $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\equiv 1$。

证明 因为 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是标准正交系，由定理 3.4 可知 $F(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1$，当然也有 $F(\omega+\pi)\equiv 1$，$F(2\omega)\equiv 1$。

$$
\begin{aligned}
F(2\omega) &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(2\omega+2k\pi)|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}[2(\omega+k\pi)]|^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}}|H(\omega+k\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+k\pi)|^2。
\end{aligned}
$$

把奇、偶项分开，$k=2l$，$k=2l+1$，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbf{Z}}|H(\omega+k\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+k\pi)|^2 \\
&= \sum_{l\in\mathbf{Z}}|H(\omega+2l\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+2l\pi)|^2+ \\
&\quad \sum_{l\in\mathbf{Z}}|H(\omega+2l\pi+\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+2l\pi+\pi)|^2 \\
&= \sum_{l\in\mathbf{Z}}|H(\omega)|^2|\hat{\varphi}(\omega+2l\pi)|^2+ \\
&\quad \sum_{l\in\mathbf{Z}}|H(\omega+\pi)|^2|\hat{\varphi}(\omega+2l\pi+\pi)|^2 \\
&= |H(\omega)|^2F(\omega)+|H(\omega+\pi)|^2F(\omega+\pi) \\
&= |H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\equiv 1。
\end{aligned}
$$

$H(\omega)$可以看做一个滤波器，它在小波变换中有很重要的作用。

多分辨分析的尺度函数 $\varphi(t)$的平移和伸缩$\{\varphi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$之所以不能成为 L^2 的标准正交基，是因为由$\{\varphi_{m,n}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}$生成的 L^2

的子空间$\{V_m\}$不是L^2的正交分解。现需要对L^2作正交分解。

设W_m是V_m在V_{m+1}中的正交补，即$W_m \perp V_m$，且$W_m \oplus V_m = V_{m+1}$。这样对任意取定的N，有

$$
\begin{aligned}
V_N &= W_{N-1} \oplus V_{N-1} \\
&= W_{N-1} \oplus W_{N-2} \oplus V_{N-2} \\
&= \cdots\cdots \\
&= W_{N-1} \oplus W_{N-2} \oplus W_{N-3} \oplus \cdots \oplus W_s \oplus V_s。
\end{aligned}
$$

由于$W_{N-1} \perp V_{N-1}$，所以$W_{N-1} \perp W_{N-2}$，$W_{N-1} \perp V_{N-2}$，… 同理$W_j \perp W_i$，$j \neq i$，即$\{W_m, s \leqslant m \leqslant N-1\}$是$L^2$的一列相互正交的子空间。令$N \to +\infty$，$s \to -\infty$，得$L^2 = \bigoplus\limits_{m \in \mathbf{Z}} W_m$，这样就实现了对$L^2$的正交分解，$W_m$称为小波空间。现在需要构造$W_0$的标准正交基，进而得到$W_m$的标准正交基。

定理 3.11 $\{V_m\}$，$\varphi(t)$是一个正交多分辨分析，$\varphi(t) = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} p_n \varphi(2t-n)$是双尺度方程，记$q_n = (-1)^n \overline{p}_{1-n}$，则$\psi(t) = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} q_n \varphi(2t-n)$是一个正交小波母函数。这里$\overline{p}_{1-n}$是$p_{1-n}$的共轭复数。

这个定理是小波分析的一个很重要的定理，定理讲述的构造正交小波的方法，是构造正交小波的极其常用的方法。定理也给出了尺度函数与正交小波母函数之间的关系。

证明 首先证明$\{\psi(t-n), n \in \mathbf{Z}\}$是一个标准正交系。

对$\psi(t) = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n \overline{p}_{1-n} \varphi(2t-n)$两边作傅里叶变换

$$
\begin{aligned}
\hat{\psi}(\omega) &= \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^n \overline{p}_{1-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n}{2}\omega} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}} \left[\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbf{Z}} (-1)^{n-1} \overline{p}_{1-n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n-1}{2}\omega}\right] \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)。
\end{aligned}
$$

因为$H(\omega) = \frac{1}{2} \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} p_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}$，

所以 $$\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\overline{p_n e^{-in\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\bar{p}_n(-1)^n e^{in\frac{\omega}{2}}。$$

令 $n=1-k$，则 $(-1)^n=(-1)^{-n}=(-1)^{k-1}$，得

$$\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^{k-1}\,\bar{p}_{1-k}e^{-i(k-1)\frac{\omega}{2}},$$

代入$\hat{\psi}(\omega)$的表达式

$$\hat{\psi}(\omega)=-e^{-i\frac{\omega}{2}}\,\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

这样 $$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2$$

$$=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|-e^{-i\frac{\omega+2k\pi}{2}}\right|^2\left|H\left(\frac{\omega+2k\pi}{2}+\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega+2k\pi}{2}\right)\right|^2$$

$$=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}+(k+1)\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)\right|^2。$$

把 k 分为奇数 $k=2l+1$ 和偶数 $k=2l$，且注意到 $H(\omega)=H(\omega+2\pi)$，则

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2$$

$$=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}+(2l+1)\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right|^2+$$

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}+2(l+1)\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+(2l+1)\pi\right)\right|^2$$

$$=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right|^2+$$

$$\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi+\pi\right)\right|^2$$

$$= \left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 \sum_{l\in \mathbf{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right|^2 +$$

$$\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 \sum_{l\in \mathbf{Z}}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi+\pi\right)\right|^2$$

$$\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 F\left(\frac{\omega}{2}\right)+\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 F\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)$$

$$= \left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2 + \left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 \equiv 1。$$

由定理 3.4，$\{\psi(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}$ 是标准正交系。

记 $V_0 = \overline{\mathrm{span}\{\varphi(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}}$；

$W_0 = \overline{\mathrm{span}\{\psi(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}}$；

$V_1 = \overline{\mathrm{span}\{\varphi(2t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}}$。

现证明：$V_0 \perp W_0$，且 $V_0 \oplus W_0 = V_1$。

由于 $\{\varphi(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的标准正交基，$\{\psi(t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}$ 是 W_0 的标准正交基。要证明 $V_0 \perp W_0$，只需证明 $(\varphi(t-k),\ \psi(t-m)) = 0$，对任意的 $k,\ m\in \mathbf{Z}$ 成立。

$$(\varphi(t-k),\ \psi(t-m)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t-k)\,\overline{\psi(t-m)}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u+m-k)\,\overline{\psi(u)}\,\mathrm{d}u$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u+l)\,\overline{\psi(u)}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{il\omega}\,\hat{\varphi}(\omega)\,\overline{\hat{\psi}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{il\omega}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{\left[-\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}}\,\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]}\mathrm{d}\omega$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{e}^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{d}\omega$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\sum_{n\in Z}\int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)e^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}d\omega$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n\in Z}\left|\hat{\varphi}\left[\frac{1}{2}(\omega+2n\pi)\right]\right|^2 H\left[\frac{1}{2}(\omega+2n\pi)\right]$$

$$H\left[\frac{1}{2}(\omega+2n\pi+\pi)\right]e^{i(2l+1)\frac{1}{2}(\omega+2n\pi)}d\omega。$$

把 n 按奇、偶数分开，$n=2m$，$n=2m+1$，

$$上式=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in Z}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2m\pi\right)\right|^2 H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)e^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}d\omega$$

$$+\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in Z}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\frac{1}{2}(4m+2)\pi\right)\right|^2 H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\cdot$$

$$H\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}e^{i(2l+1)(2m+1)\pi}d\omega$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in Z}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2m\pi\right)\right|^2 H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)e^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}d\omega$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{m\in Z}\left|\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2m\pi\right)\right|^2 H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)$$

$$H\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}d\omega$$

$$=\frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)e^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)$$

$$H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)e^{i(2l+1)\frac{\omega}{2}}d\omega$$

$$=0。$$

这就证明了 $W_0\perp V_0$。

再证明 $W_0\oplus V_0=V_1$：

令
$$h_0(\omega)=\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{\omega}{2}\right)-H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right]e^{i\frac{\omega}{2}},$$

$$h_1(\omega)=\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{\omega}{2}\right)+H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right],$$

$$h_0(\omega+2\pi)=\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)-H\left(\frac{\omega}{2}+2\pi\right)\right]e^{i\frac{\omega+2\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)-H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]e^{i\frac{\omega}{2}}\cdot e^{i\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{\omega}{2}\right)-H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right]=h_0(\omega)。$$

同理可证，$h_1(\omega+2\pi)=h_1(\omega)$。

由于
$$H(\omega)=P(e^{-i\omega})=\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}p_k e^{-ik\omega},$$

所以
$$h_1(\omega)=\frac{1}{4}\left[\sum_{k\in Z}p_k e^{-ik\frac{\omega}{2}}+\sum_{k\in Z}p_k e^{ik\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k\in Z}p_k e^{-ik\frac{\omega}{2}}(1+e^{-ik\pi})$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}p_{2k}e^{-ik\omega}。$$

同理可得，$h_0(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{k\in Z}p_{2k+1}e^{-ik\omega}$。

$$\overline{h_1(\omega)}\,\hat{\varphi}(\omega)+h_0(\omega)\,\hat{\psi}(\omega)$$

$$=\frac{1}{2}\overline{\left[H\left(\frac{\omega}{2}\right)+H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right]}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[H\left(\frac{\omega}{2}\right)-H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right]e^{i\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\left(-e^{-i\frac{\omega}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2+\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}H\left(\frac{\omega}{2}\right)-H\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\left[\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)。$$

两边作傅里叶逆变换，因为 $F^{-1}\left[\frac{1}{2}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right]=\varphi(2t)$，

$$\begin{aligned}
&F^{-1}[\overline{h_1(\omega)}\,\hat{\varphi}(\omega)+h_0(\omega)\,\hat{\psi}(\omega)]\\
&=F^{-1}\left[\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{p_{2k}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}\,\hat{\varphi}(\omega)+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{2k+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\omega}\,\hat{\psi}(\omega)\right]\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{p}_{2k}\varphi(t+k)+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{2k+1}\psi(t-k)\\
&=\varphi(2t)。
\end{aligned}$$

由此可知，$\varphi(2t)$ 可以由 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 和 $\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 来表示。

同理可证：

$$\begin{aligned}
&h_0(\omega)\,\hat{\varphi}(\omega)-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega}h_1(\omega)\,\hat{\psi}(\omega)\\
&=\frac{1}{2}\left[\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{2k+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega}\,\hat{\varphi}(\omega)-\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{2k}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k-1)\omega}\,\hat{\psi}(\omega)\right]\\
&=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)。
\end{aligned}$$

两边作傅里叶逆变换，得

$$\varphi(2t+1)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{2k+1}\varphi(t+k)-\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_{2k}\psi(t-(k-1))\right]。$$

由此可知，$\varphi(2t+1)$ 也可以由 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 和 $\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 表示。所以 $\varphi(2t-n)$，$n\in\mathbf{Z}$ 都可以由 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 和 $\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 表示，因此 V_1 中的任何函数都可由 $\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 和 $\{\psi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 表示，所以 $V_1\subset W_0\oplus V_0$。而 $V_0\subset V_1$，且 $\psi(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n\,\overline{p}_{1-n}\varphi(2t-n)\in V_1$，即 $W_0\subset V_1$，即 $W_0\oplus V_0\subset V_1$。

由此证明了 $V_1=W_0\oplus V_0$。

类似地，可以证明 $\{\psi_{m,n}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 $W_m=\overline{\mathrm{span}\{\psi_{m,n}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}}$ 的标准正交基。且 $W_m\perp V_m$，$W_m\oplus V_m=V_{m+1}$。$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 L^2 的标准正交基。

尺度函数与正交小波母函数的区别在于，尺度函数 $\varphi(t)$ 可以把 L^2 分解为一列子空间 $\{V_m\}$，$V_m = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_{m,n}(t),\ n \in \mathbf{Z}\}}$，正交小波母函数 $\psi(t)$ 则将 L^2 分解为一列相互正交的子空间 $\{W_m\}$，$W_m = \overline{\mathrm{span}\{\psi_{m,n}(t),\ n \in \mathbf{Z}\}}$。定理 3.11 则给出了两者之间的关系。定理也指出了由多分辨分析出发，构造正交小波母函数的方法。其步骤为：

第一步，构造尺度函数 $\varphi(t)$，使 $\{\varphi(t-n),\ n \in \mathbf{Z}\}$ 是一个标准正交系。（如果 $\{\varphi(t-n),\ n \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基，则可以通过正交化方法，使其成为 V_0 的标准正交基。）

第二步，由双尺度方程 $\varphi(t) = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} p_n \varphi(2t-n)$，求出双尺度序列 $\{p_n\}$。

第三步，由双尺度序列构造 $\{\overline{p}_{1-n}\} = \{q_n\}$ 就可以得到正交小波母函数 $\psi(t)$。

用这种方法构造的小波，其性质在很大程度上取决于尺度函数的性质。这种构造方法的困难之处在于求双尺度序列 $\{p_n\}$。事实上，$\{p_n\}$ 在一般情况下是很难求的，关键是希望能通过选择 $\varphi(t)$，使 $\{p_n\}$ 只有有限项非零，或者可以通过 $\varphi(t)$ 写出 $\{p_n\}$ 的通项表示式，再有就是使得当 $n\to\infty$ 时，$p_n \to 0$ 的速度很快，那么用有限项近似代替 $\{p_n\}$。

构造正交小波母函数的另一种方法是通过双尺度方程的傅里叶变换。

对 $\varphi(t) = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} p_n \varphi(2t-n)$ 两边作傅里叶变换，得

$$\hat{\varphi}(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} p_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n}{2}\omega}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)},$$

$$\hat{\psi}(\omega) = -\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\,\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= -\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\omega}{2}}\,\overline{\left[\frac{\hat{\varphi}(\omega+\pi)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right]}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

然后等式两边作傅里叶逆变换，可求得 $\psi(t)$。

这种方法的困难之处，在于作傅里叶逆变换，一般情况这个傅里叶逆变换很难用解析式来表示，通常只能作数值积分来得到 $\psi(t)$的近似。

例 3.11 取 $\varphi(t)=N_1(t)$，在上一节已经证明过 $\{N_1(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 是一个标准正交系。

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}e^{-i\frac{\omega}{2}},$$

$$H(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}=\frac{\frac{1-e^{-i2\omega}}{2i\omega}}{\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}}=\frac{1-e^{-i2\omega}}{2(1-e^{-i\omega})}=\frac{1+e^{-i\omega}}{2},$$

又因为
$$\begin{aligned}H(\omega)&=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_n e^{-in\omega}\\&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{-i\omega}。\end{aligned}$$

所以，$p_0=1$，$p_1=1$，$p_k=0$，$k\neq 0,1$。这样就求出了$\{p_n\}$。

双尺度方程为
$$\begin{aligned}\varphi(t)&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_n\varphi(2t-n)\\&=\varphi(2t)+\varphi(2t-1)。\end{aligned}$$

$$\psi(t)=\varphi(2t)-\varphi(2t-1)=N_1(2t)-N_1(2t-1)。$$

这个 $\psi(t)$正是 Haar 小波 $H(t)$。

例 3.12 取尺度函数为 $\varphi(t)=\frac{\sin\pi t}{\pi t}$，前面也已经证明过 $\{\varphi(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 是标准正交系，$\hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\pi,\\0 & |\omega|>\pi,\end{cases}$

$$V_0=\overline{\operatorname{span}\{\varphi(t-n), n\in\mathbf{Z}\}}=B_\pi, V_m=B_{2^m\pi},$$

双尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_n\varphi(2t-n)$。

由 $B_{2\pi}$上的取样定理，对任意的 $g(t)\in B_{2\pi}$，只要 $h\leqslant\frac{\pi}{b}=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$

时，$g(t)=\sum_{n\in Z}g(nh)\dfrac{\sin\frac{\pi}{h}(t-nh)}{\frac{\pi}{h}(t-nh)}$，现取 $h=\frac{1}{2}$ 代入，得

$$g(t)=\sum_{n\in Z}g\left(\frac{n}{2}\right)\frac{\sin\pi(2t-n)}{\pi(2t-n)}$$

$$=\sum_{n\in Z}g\left(\frac{n}{2}\right)\varphi(2t-n)。$$

$\varphi(t)\in V_0\subset V_1$，令 $g(t)=\varphi(t)$，并将双尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n\in Z}p_n\varphi(2t-n)$ 与取样定理 $\varphi(t)=\sum_{n\in Z}\varphi\left(\frac{n}{2}\right)\varphi(2t-n)$ 比较，可得

$$p_n=\varphi\left(\frac{n}{2}\right)=\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}=\begin{cases}1 & n=0,\\ 0 & n=2k\neq 0,\\ \dfrac{(-1)^k2}{(2k+1)\pi} & n=2k+1。\end{cases}$$

所以，
$$\psi(t)=\sum_{n\in Z}(-1)^n\,\overline{p}_{1-n}\varphi(2t-n),$$

令 $n=-k$，得

$$\psi(t)=\sum_{k\in Z}(-1)^k\,\overline{p}_{1+k}\varphi(2t+k)。$$

当 $k=-1$ 时，$\overline{p}_{1+k}=\overline{p}_0=1$，$\varphi(2t+k)=\varphi(2t-1)$；$k=2l-1$ 时，$\overline{p}_{1+k}=\overline{p}_{2l}=0$；$k=2l$ 时，$\overline{p}_{1+k}=\overline{p}_{2l+1}=\dfrac{(-1)^l\cdot 2}{(2l+1)\pi}$。

由此得
$$\psi(t)=\sum_{k\in Z}(-1)^k\,\overline{p}_{1+k}\varphi(2t+k)$$

$$=\sum_{l\in Z}p_{2l+1}\varphi(2t+2l)-p_0\varphi(2t-1)$$

$$=2\sum_{l\in Z}\frac{(-1)^l}{(2l+1)\pi}\frac{\sin(2t+2l)\pi}{(2t+2l)\pi}-\frac{\sin 2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin \pi\left(t-\frac{1}{2}\right)-\sin 2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}。$$

这正是我们在第二章第二节中介绍的 Shannon 小波。

Shannon 小波的光滑性很好，但局部性很差，而且 $\psi(t)$ 不是窗口函数。

例 3.13 上节定理 3.8 给出一个改进的取样定理，其基函数为 $s(t) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{h}t\sin\beta t}{\beta\frac{\pi}{h}t^2}$，现取尺度函数 $\varphi(t) = s(t)$，取 $b = \pi - \beta$，$V_0 = B_{\pi-\beta}$，$V_m = B_{2^m(\pi-\beta)}$，双尺度方程 $\varphi(t) = \sum\limits_{n\in Z} p_n\varphi(2t-n)$ 与上例一样，由取样定理 $\varphi(t) = \sum\limits_{n\in Z}\varphi\left(\frac{n}{2}\right)\varphi(2t-n)$，$p_n = \varphi\left(\frac{n}{2}\right)$，由此得到一个正交小波母函数

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \sum_{n\in Z}(-1)^n\,\overline{p}_{1-n}\varphi(2t-n)\\ &= \sum_{n\in Z}(-1)^n\varphi\left(\frac{1-n}{2}\right)\varphi(2t-n)\\ &= \sum_{k\in Z}(-1)^k\varphi\left(\frac{k+1}{2}\right)\varphi(2t+k)。\end{aligned}$$

这个小波保留了 Shannon 小波的光滑性的优点，而局部性则比 Shannon 小波有所改善，但它是一个级数表达式，计算时只能采用近似的方法。

Haar 小波在时域上有很好的局部性，但它不连续，故其在频域上的局部性很差。Haar 小波实际上就是取零次 B 样条 $N_1(t)$ 作为尺度函数来构造的正交小波母函数，由于 $N_1(t)$ 的光滑性很差，导致 Haar 小波的光滑性很差，现在通过卷积可以改善 B 样条的光滑性。

例 3.14 $N_2(t) = (N_1 * N_1)(t)$，$N_2(t)$ 是一个连续函数，取 $\varphi_2(t) = N_2(t)$。

由上一节例 3.5，已知 $\{\varphi_2(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 不是标准正交系，又由例 3.7 可知，可以将其正交化，得

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{\hat{\varphi}_2(\omega)}{\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}_2(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$$

$$=\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}}}e^{-i\omega},$$

作傅里叶逆变换得

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{4\sin^2\frac{\omega}{2}}{\omega^2\sqrt{1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}}}e^{-i\omega}e^{i\omega t}\,d\omega。$$

以 $\varphi(t)$作为尺度函数来构造正交小波母函数。但这时要通过双尺度序列$\{p_n\}$来求 $\psi(t)$是极其困难的。

现在我们通过 $H(\omega)$来求出$\hat{\psi}(\omega)$，然后再通过傅里叶逆变换求出 $\psi(t)$。

$$H(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}=\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2+\cos\omega}{1+\cos^2\omega}}e^{-i\omega};$$

$$\hat{\psi}(\omega)=-e^{-i\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$=\frac{-16}{\omega^2}\sin^4\frac{\omega}{4}\sqrt{\frac{1+2\sin^2\frac{\omega}{4}}{\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{4}\right)\left(3-8\sin^2\frac{\omega}{4}+8\sin^4\frac{\omega}{4}\right)}}e^{-i\frac{\omega}{2}}。$$

然后求这个$\hat{\psi}(\omega)$的傅里叶逆变换得到 $\psi(t)$，当然求这个函数的傅里叶逆变换的解析式是很困难的，通常只能通过数值积分求出 $\psi(t)$的离散值。

当然也可以进一步取光滑性更好的高次 B 样条，作为尺度函数

$\varphi(t)$，但这时的表达式更为复杂。

例 3.15 取 $\varphi_3(t) = N_3(t)$，则 $\hat{\varphi}_3(\omega) = \left[\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right]^3 (e^{-i\frac{\omega}{2}})^3$。

由于

$$\sum_{k\in Z} |\hat{\varphi}_3(\omega+2k\pi)|^2 = \sum_{k\in Z}\left|\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)}{\frac{\omega}{2}+k\pi}\right|^6$$

$$= \sin^6\frac{\omega}{2}\sum_{k\in Z}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{2}+k\pi\right)^6}$$

$$= \frac{11}{20}+\frac{13}{30}\cos\omega+\frac{1}{60}\cos2\omega\text{（不恒等于 1），}$$

所以需作正交化 $\hat{\varphi}(\omega) = \dfrac{\hat{\varphi}_3(\omega)}{\left(\sum\limits_{k\in Z}|\hat{\varphi}_3(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$ 后

$$\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\frac{\omega}{2}}\,\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$= -e^{-i\frac{\omega}{2}}\,\overline{\left[\frac{\hat{\varphi}(\omega+2\pi)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right]}\,\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)。$$

这时，其表达式将十分复杂，一般只能通过近似方法解决。

§3.4 尺度函数的构造

从上一节构造正交小波的多分辨分析的方法中可以看到，如果已知一个尺度函数，就可以由双尺度方程 $\varphi(t) = \sum\limits_{n\in Z} p_n\varphi(2t-n)$，得到正交小波 $\psi(t) = \sum\limits_{n\in Z}(-1)^n\,\overline{p}_{1-n}\varphi(2t-n)$，或者从滤波器 $H(\omega) = \dfrac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}$

来得到正交小波的傅里叶变换 $\hat{\psi}(\omega)=-e^{i\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$，所以尺度函数起了相当重要的作用。而且尺度函数的性质很大程度上确定了正交小波的性质，以及取样定理的收敛速度。

必须指出，如果有一个函数 $f(t)\in L^2$ 和一个序列 $\{p_n\}\in l^2$ 满足等式 $f(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}p_nf(2t-n)$，这不一定就是一个双尺度方程，$f(t)$ 不一定是尺度函数。

现在讨论尺度函数的构造。

我们当然希望尺度函数要有较好的光滑性，有较快的衰减速度，还希望有某种对称性，最重要也是最困难的是它的整数平移要成为 V_0 的标准正交基，至少要成为 V_0 的 Riesz 基，那么这样的函数应该具有什么特征呢？

在前面我们已经看到，尺度函数的一些特性可以通过其傅里叶变换来描述。受此启发，构造尺度函数我们也可以从其傅里叶变换着手。那么 $\hat{\varphi}(\omega)$ 应该满足什么条件，可以使其傅里叶逆变换 $\varphi(t)$ 成为尺度函数呢？

L^2 中的函数 $\varphi(t)$，如果其傅里叶变换满足以下三个条件，则 $\varphi(t)$ 可以成为尺度函数：

条件一，$\hat{\varphi}(\omega)$ 连续有界，且 $\hat{\varphi}(0)=1$；

条件二，存在常数 A，B，使

$$0<A\leqslant\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<\infty;$$

条件三，$\dfrac{\hat{\varphi}(2\omega)}{\hat{\varphi}(\omega)}$ 是以 2π 为周期的周期函数。

这里条件一是保证能使 $\varphi(t)$ 能生成一个多分辨分析，条件二是使 $\varphi(t)$ 的整数平移能够成为 Riesz 基；而条件三是保证 $\varphi(t)$ 满足双尺度方程。但要说明的是这些条件是充分条件，而非充要条件。如果把条件二改为 $\sum_{n\in\mathbb{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv1$，那么其整数平移就能成为标准正交基。这三个条件，特别是条件二常常判断很困难，下面的定理

给出了一种在$\hat{\varphi}(\omega)$有紧支集的情况下，比较容易判别的充分必要条件。

定理 3.12 设实函数$\hat{\varphi}(\omega)$连续，且 $\mathrm{supp}\,\hat{\varphi}=[a, b]$，则$\hat{\varphi}(\omega)$满足下列条件：

(1) $\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$，$H(\omega)$是 2π 为周期的周期函数；

(2) $\sum_{k\in Z}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1$ 的充分必要条件是：

(Ⅰ) $2\pi<b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，$\frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi$，$b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi$；

(Ⅱ) $a<0$，$b>0$；

(Ⅲ) 令 $c=b-a-2\pi$，则当 $\omega\in[a+c, b-c]$时，$|\hat{\varphi}(\omega)|\equiv 1$；

(Ⅳ) $\omega\in[a, a+c]$时，$|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2\equiv 1$。

这个定理是由安徽大学数学系的彭思龙在毕业论文中提出的。这个定理指出了频谱有限的尺度函数应满足的充分必要条件，这四个条件都与$\hat{\varphi}(\omega)$的支集有关。

证明 先证明必要性。分几步证明。

先证明结论(A)：$a\leqslant 0$，$b\geqslant 0$。

反证：若 $a>0$，则可取 $\varepsilon>0$，使 $\frac{a}{2}+\varepsilon<a$，$\frac{a}{2}+\varepsilon<\frac{b}{2}$。

因为 $\mathrm{supp}\,\hat{\varphi}=[a, b]$，而 $a<a+2\varepsilon<b$，所以 $\hat{\varphi}(a+2\varepsilon)\neq 0$。

又因为 $\frac{a}{2}+\varepsilon<a$，所以 $\hat{\varphi}\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)=0$。

而根据已知条件(1)： $\hat{\varphi}(a+2\varepsilon)=\hat{\varphi}\left[2\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)\right]$

$$=\hat{\varphi}\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)H\left(\frac{a}{2}+\varepsilon\right)=0。$$

这就与 $\hat{\varphi}(a+2\varepsilon)\neq 0$ 矛盾。所以结论(A) $a\leqslant 0$，$b\geqslant 0$ 成立。

再证明结论(B)：$b-a>2\pi$。

反证：若 $b-a<2\pi$，则存在 ω_0，使 $\hat{\varphi}(\omega_0+2k\pi)=0$，见图 3-2。

图 3-2

这就与条件(2)矛盾。若 $b-a=2\pi$，则当 $\omega\in(a,b)$ 时，$\omega\pm2\pi\,\overline{\in}\,$ $\mathrm{supp}\hat{\varphi}$，这时，$\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=|\hat{\varphi}(\omega)|^2=\begin{cases}1 & \omega\in(a,b)\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，显然与 $\hat{\varphi}(\omega)$ 连续矛盾。所以结论(B)：$b-a>2\pi$ 成立。

再证结论(C)：$b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，$b-\frac{a}{2}\leqslant2\pi$，$\frac{b}{2}-a\leqslant2\pi$。

证明 当 $\omega\in\left[a,\frac{a}{2}\right]\cup\left[\frac{b}{2},b\right]$ 时，$2\omega<a$ 或 $2\omega>b$，因此有 $\hat{\varphi}(2\omega)=0$，$\hat{\varphi}(\omega)\neq0$，由条件(1)可知必有 $H(\omega)\equiv0$，因此 $\mathrm{supp}\,H\subset\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$，而因为 $H(\omega)$ 是以 2π 为周期的周期函数，所以 $H(\omega)=H(\omega+2\pi)=0$，即当 $\omega\in\left[a+2\pi,\frac{a}{2}+2\pi\right]\cup\left[\frac{b}{2}+2\pi,b+2\pi\right]$ 时，$H(\omega)\equiv0$，但 $\mathrm{supp}\,H\subset\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$，所以应有 $a+2\pi\geqslant\frac{b}{2}$，即 $\frac{b}{2}-a\leqslant2\pi$，同理 $b-\frac{a}{2}\leqslant2\pi$，把这两式相加可得 $\frac{3}{2}b-\frac{3}{2}a\leqslant4\pi$，即 $b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$。

再证明结论(D)：$a<0$，$b>0$。

由于前面已证明了结论(A)：$a\leqslant0$，$b\geqslant0$，所以现在仅需证明 $a\neq0$，$b\neq0$ 就可以了。

反证：若 $a=0$，则由结论(C)的证明可知 $\mathrm{supp}\,H\subset\left(0,\frac{b}{2}\right)$。因此，当 $\omega\in\left(\frac{b}{2},b\right]$ 时，$H(\omega)\equiv0$。又由结论(B)和(C)可知，$2\pi<b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，所以存在 $\omega_0\in\left(0,\frac{b}{2}\right)$，使 $H(\omega_0)\neq0$，而 $\omega_0+2\pi\in$

$\left[\frac{b}{2}, b\right]$，有 $H(\omega_0+2\pi)=0$，这就与 $H(\omega)$ 是 2π 为周期的周期函数的条件矛盾。所以 $a\neq 0$，类似可证 $b\neq 0$。

最后证明结论(E)：$\omega\in[a+c, b-c]$ 时，$|\hat{\varphi}(\omega)|^2\equiv 1$，且 $\omega\in[a, a+c]$ 时，$|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2\equiv 1$。

证明 对任意的 $\omega\in[a+c, b-c]$ 时，$\omega+2k\pi\,\overline{\in}\,[a, b]$，$k=\pm 1, \pm 2, \cdots$ 因此，$\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)=0$，根据条件(2)，$\sum_{k\in Z}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=|\hat{\varphi}(\omega)|^2+\sum_{k\neq 0}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1$，所以当 $\omega\in[a+c, b-c]$ 时，$|\hat{\varphi}(\omega)|^2\equiv 1$。

同理：对任意的 $\omega\in[a, a+c]$ 时，$\omega+2k\pi\,\overline{\in}\,[a, b]$，$k\neq 0, 1$，所以 $\sum_{k\in Z}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2=|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2\equiv 1$。

综合上面的结论可知：由(B)，(C)可推知(Ⅰ)，由(A)，(D)可推知(Ⅱ)，由(E)可推知(Ⅲ)，(Ⅳ)。

必要性证毕。

再证充分性。

由(Ⅰ)可知，supp $\hat{\varphi}$ 的长度 $b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，所以和式 $\sum_{k\in Z}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2$ 最多只有两项非零项。由(Ⅳ)可知(2)成立。

现需证明，存在一个函数 $H(\omega)$，满足条件(1)。

先令 $H(\omega)=|\hat{\varphi}(2\omega)|$，则当 $\omega\in\left[a, \frac{a}{2}\right]\cup\left[\frac{b}{2}, b\right]$ 时，$2\omega\,\overline{\in}\,[a, b]$，故 $\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)=0$，这样在 $\omega\in\left[a, \frac{a}{2}\right]\cup\left[\frac{b}{2}, b\right]$ 时，$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$ 当然成立。

当 $\omega\in\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 时，由 $\frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi$，可知 $\frac{b}{2}-a-2\pi\leqslant 0$，$b-a-2\pi\leqslant\frac{b}{2}$，可得 $c\leqslant\frac{b}{2}$，$b-c\geqslant\frac{b}{2}$。

同理，由 $b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi$，可得 $a+c\leqslant\frac{a}{2}$。

由 $b-c\geqslant\frac{b}{2}$，$a+c\leqslant\frac{a}{2}$，可得 $\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)\subset[a+c,b-c]$。

因此，当 $\omega\in\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$ 时，由（Ⅲ）可知 $|\hat{\varphi}(\omega)|\equiv 1$。合起来，有 $\omega\in[a,b]$ 时，$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$。

用这个定理，可以构造频谱有限的尺度函数，其步骤是：

第一步，选定 a，b，满足条件 $a<0$，$b>0$，且 $2\pi<b-a\leqslant\frac{8}{3}\pi$，$\frac{b}{2}-a\leqslant 2\pi$，$b-\frac{a}{2}\leqslant 2\pi$，通常取对称区间。

第二步，令 $c=b-a-2\pi$，构造钟形函数 $h(u)$，满足 $h(u)\geqslant 0$，$h(-u)=h(u)$，$\mathrm{supp}\,h\subset\left[-\frac{c}{2},\frac{c}{2}\right]$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}$，见图 3－3。

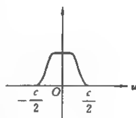


图 3－3

$h(u)$ 的光滑程度可根据实际情况确定。$\hat{\varphi}(\omega)$ 的光滑程度取决于 $h(u)$ 的光滑程度。所以这一步很重要。

第三步：令 $f(t)=\int_{-\infty}^{t}h(u)\mathrm{d}u$，显然 $f(t)+f(-t)=\frac{\pi}{2}$，且当 $t\leqslant-\frac{c}{2}$ 时，$f(t)=0$，当 $t\geqslant\frac{c}{2}$ 时，$f(t)=\frac{\pi}{2}$。

令 $s(t)=\sin(f(t))$，$c(t)=\cos(f(t))$，容易证明 $s(t)=c(-t)$

且 $s(t)=\begin{cases}1 & t\geqslant\frac{c}{2}\\ 0 & t\leqslant-\frac{c}{2}\end{cases}$，$c(t)=\begin{cases}0 & t\geqslant\frac{c}{2}\\ 1 & t\leqslant-\frac{c}{2}\end{cases}$。

最后令 $\hat{\varphi}(\omega)=s\left(\omega-a-\frac{c}{2}\right)c\left(\omega-b+\frac{c}{2}\right)$，这样的 $\hat{\varphi}(\omega)$ 满足定理的条件（Ⅰ）～（Ⅳ）。对 $\hat{\varphi}(\omega)$ 作傅里叶逆变换后，可以得到尺度函数 $\varphi(t)$。

当然，也可以直接由$\hat{\varphi}(\omega)$来求出 $\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\frac{\omega}{2}}\left[\dfrac{\hat{\varphi}(\omega+\pi)}{\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{2}+\pi\right)}\right]\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$，

由于$\hat{\varphi}(\omega)$有紧支集，故$\hat{\psi}(\omega)$也有紧支集，由此构造出来的正交小波母函数 $\psi(t)$是频谱有限函数，且 $\psi(t)$趋于零的速度，可以由钟形函数的光滑程度来控制。因此，整个构造过程中钟形函数是关键。

例 3.16 取 $a = -\frac{7}{6}\pi$，$b = \frac{7}{6}\pi$，$c = b - a - 2\pi = \frac{\pi}{3}$

$$
\text{取}\quad h(u) = \begin{cases} \alpha\left(u - \dfrac{c}{2}\right)\left(-\dfrac{8}{c^2}u^2 + \dfrac{2}{c}u + 1\right) & 0 \leqslant u \leqslant \dfrac{c}{2}, \\ 0 & \dfrac{c}{2} < u, \\ h(-u) & u < 0. \end{cases}
$$

这里 α 是常数，选择 α 使 $\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$。然后可按第三步求出$\hat{\varphi}(\omega)$。

例 3.17 取 $-a = b = \frac{13}{12}\pi$，$c = b - a - 2\pi = \frac{\pi}{6}$。

$$
\text{取}\qquad h(u) = \begin{cases} 3\cos 12u + 3 & u \in \left[-\dfrac{\pi}{12}, \dfrac{\pi}{12}\right], \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}
$$

$$
f(t) = \int_{-\infty}^{t} h(u)\mathrm{d}u = \int_{-\frac{\pi}{12}}^{t} (3\cos 12u + 3)\mathrm{d}u
$$

$$
= \frac{1}{4}\sin 12t + 3t + \frac{\pi}{4},
$$

$$
\hat{\varphi}(\omega) = \sin(f(\omega+\pi))\cos(f(\omega-\pi))。
$$

对$\hat{\varphi}(\omega)$作傅里叶逆变换。由于$\hat{\varphi}(\omega)$的二阶导数连续三阶导数存在，故作三次分部积分后，得

$$
\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega
$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} \hat{\varphi}(\omega)\cos\omega t\,\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-b}^{b} \hat{\varphi}'''(\omega)\sin\omega t \cdot \frac{1}{t^3}\mathrm{d}\omega$$

$$= O\left(\frac{1}{t^3}\right)。$$

钟形函数的选取一般是从一个 $t\to\infty$ 时，由紧支集的奇函数 $h_0(t)$ 出发，作积分得到。设 $\operatorname{supp} h_0(t) = [a, b]$，则令 $h(u) = \int_a^u h_0(t)\mathrm{d}t$，$h(u)$ 的光滑性比 $h_0(t)$ 的光滑性高一阶。

如例 3.17，取 $h_0(t) = \begin{cases} -36\sin 12t & t\in\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}\right] \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$

$h(u) = \int_{-\frac{\pi}{12}}^{u} h_0(t)\mathrm{d}t$，

$h_0(t)$ 和 $h(u)$ 的图形分别如图 3-4 和图 3-5 所示。

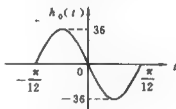


图 3-4

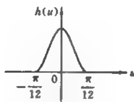


图 3-5

又如，取定 $a = -\frac{4}{3}\pi$，$b = \frac{4}{3}\pi$，$h_0(t)$ 取分段线性函数

$$h_0(t) = \begin{cases} t + \frac{4}{3}\pi & t\in\left[-\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right], \\ -t & t\in\left(-\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right), \\ t - \frac{4}{3}\pi & t\in\left[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right], \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$$

$$h(u)=\int_{-\frac{4}{3}\pi}^{u} h_0(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{4}{3}\pi t+\dfrac{8}{9}\pi^2 & t\in\left[-\dfrac{4}{3}\pi,-\dfrac{2}{3}\pi\right],\\ \dfrac{4}{9}\pi^2-\dfrac{1}{2}t^2 & t\in\left(-\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{2}{3}\pi\right),\\ \dfrac{1}{2}t^2-\dfrac{4}{3}\pi t+\dfrac{8}{9}\pi^2 & t\in\left[\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{4}{3}\pi\right],\\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

$h_0(t)$和$h(u)$的图形分别如图 3－6 和图 3－7 所示。

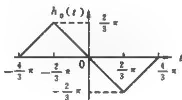


图 3－6

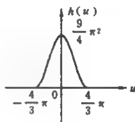


图 3－7

用这种方法构造频谱有限的尺度函数困难之处在于求傅里叶逆变换。

我们也可以从频谱有限函数的取样定理出来构造尺度函数。下面通过一个例子来说明其构造方法。

例 3.18 取 $b=0.9\pi$，$f(t)\in B_{0.9\pi}$，即 $\hat{f}(\omega)=0$，当 $|\omega|>0.9\pi$ 时，取样间隔 $h<\frac{\pi}{b}=\frac{1}{0.9}$，现取 $h=1$，$\beta=\frac{\pi}{h}-b=0.1\pi$。

$$\text{令 } G(\omega)=\begin{cases}\dfrac{2}{3\beta^3}(\omega+b+2\beta)^3 & \omega\in\left[-b-2\beta,-b-\dfrac{3}{2}\beta\right),\\ \dfrac{\omega}{\beta}-\dfrac{2}{3\beta^3}(\omega+b+\beta)^3+\dfrac{1}{\beta}\left(b+\dfrac{3}{2}\beta\right) & \omega\in\left[-b-\dfrac{3}{2}\beta,-b-\dfrac{\beta}{2}\right),\\ 1+\dfrac{2}{3\beta^3}(\omega+b+\beta)^3+\dfrac{1}{\beta}\left(b+\dfrac{3}{2}\beta\right) & \omega\in\left[-b-\dfrac{\beta}{2},-b\right].\end{cases}$$

$$\text{令 } \hat{\varphi}(\omega)=\begin{cases}G(\omega) & \omega\in[-b-2\beta,-b],\\ 1 & \omega\in(-b,b),\\ G(-\omega) & \omega\in[b,b+2\beta].\end{cases}$$

如图 3－8 所示。

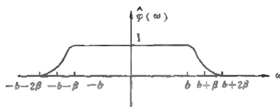


图 3－8

$G(\omega)$的选取方式是为了使$\hat{\varphi}(\omega)$保持一定的光滑性，以及 $|\hat{\varphi}(\omega)|^2+|\hat{\varphi}(\omega+2\pi)|^2=1$，对$\hat{\varphi}(\omega)$作傅里叶逆变换得尺度函数

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$=\frac{32\,000}{\pi^4}\frac{\sin^2\frac{\pi}{40}t\cdot\sin\frac{\pi}{20}t\cdot\sin\pi t}{t^4}。$$

这个尺度函数同时也是取样定理的一个基函数。

用定理 3.12 可对此例作一验证。

$b=0.9\pi$，$\beta=0.1\pi$，$\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\omega)=[-b-2\beta,\ b+2\beta]=[-1.1\pi,\ 1.1\pi]$，$a=-1.1\pi<0$，$b=1.1\pi>0$，$2\pi<b-a=2.2\pi<\frac{8}{3}\pi$，$\frac{b}{2}-a=b-\frac{a}{2}=1.65\pi$，$c=b-a-2\pi=0.2\pi$，$[a+c,\ b-c]=[-0.9\pi,\ 0.9\pi]$。

当 $\omega\in[a+c,\ b-c]$时，显然 $\hat{\varphi}(\omega)\equiv 1$。

$\omega\in[a,\ a+c]$时，$[\hat{\varphi}(\omega)]^2+[\hat{\varphi}(\omega+2\pi)]^2\equiv 1$，满足定理的(Ⅰ)～(Ⅳ)条件。

如果用光滑性，局部性更好的速降函数

$$\hat{J}(\omega)=\begin{cases}c_\beta e^{\frac{\beta^2}{\omega^2-\beta^2}} & |\omega|<\beta\\ 0 & |\omega|\geqslant\beta\end{cases}$$来代替 $G(\omega)$，这里 c_β 是使$\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{J}(\omega)d\omega=1$

的常数，则可以得到性质更好的尺度函数 $\varphi(t)=\frac{J(t)\sin\pi t}{\pi t}$，这里 $J(t)$

是$\hat{f}(\omega)$的傅里叶逆变换，但这个函数$\varphi(t)$的解析式难以得到。

§3.5 小波分解

设$\varphi(t)$是一个尺度函数，由$\varphi(t)$可以生成L^2的一列子空间$\{V_m\}$，$V_m=\overline{\mathrm{span}\{2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}}$，$\psi(t)$是一个正交小波母函数，由$\psi(t)$可以生成$L^2$的一列相互正交的子空间$\{W_m\}$，$W_m=\overline{\mathrm{span}\{2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}}$。我们可以选择适当大的$N$，使$f_N(t)\in V_N$，且$f(t)\in L^2$时，$f_N(t)\approx f(t)$，由于$V_N=W_{N-1}\oplus W_{N-2}\oplus\cdots\oplus W_s\oplus V_s$，所以$f_N(t)=g_{N-1}(t)+g_{N-2}(t)+\cdots+g_s(t)+f_s(t)$。当$\|f_s(t)\|$充分小时，$f(t)\approx f_N(t)\approx g_{N-1}(t)+g_{N-2}(t)+\cdots+g_s(t)$，其中$g_j(t)\in W_j$，称为小波空间$W_j$中的小波分量，由于$W_j\perp W_l$，$j\neq l$，所以上述过程可以看做是把一个"向量"$f_N(t)$"投影"到一个"直角坐标系"的各个"坐标轴"$W_j$上，这称为是一种小波分解。这样的分解式在工程上常常是很有用的，它可以研究$f(t)$在各个"分量"上的特性。当然，若已知各分量$g_j(t)$，也可以重建$f_N(t)$，下面看一看这种分解和重建的关系。

因为$\varphi(t)\in V_0\subset V_1$，$\psi(t)\in W_0\subset V_1$，$V_1=\overline{\mathrm{span}\{\sqrt{2}\varphi(2t-n),\ n\in \mathbf{Z}\}}$，所以$\varphi(t)$和$\psi(t)$都可以由$\{\varphi(2t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$来表示，即存在两个数列$\{p_k\}$，$\{q_k\}\in l^2$，使$\varphi(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}p_k\varphi(2t-k)$，$\psi(t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}q_k\varphi(2t-k)$。

另一方面，$\varphi(2t)$，$\varphi(2t-1)\in V_1$，且$V_1=V_0\oplus W_0$，所以$\varphi(2t)$和$\varphi(2t-1)$都可以分解：

$\varphi(2t)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}[a_{-2k}\varphi(t-k)+b_{-2k}\psi(t-k)]$，$\varphi(2t-1)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}[a_{1-2k}\varphi(t-k)+b_{1-2k}\psi(t-k)]$，由此可得$\varphi(2t-l)=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}[a_{l-2k}\varphi(t-k)+b_{l-2k}\psi(t-k)]$。

这样由于空间的分解式$V_1=V_0\oplus W_0$，可以得到四个l^2中的序列$\{p_k\}$，$\{q_k\}$，$\{a_k\}$，$\{b_k\}$。通过这四个序列既可以把V_1中的元素惟

一地分解为 V_0 和 W_0 的元素，也可以由 V_0 和 W_0 中的元素构造 V_1 中的惟一确定的元素。对于 $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$，$j \in \mathbf{Z}$ 当然也有类似的结果。

设 $f_j(t) \in V_j$，$g_j(t) \in W_j$，则 $f_j(t) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^{(j)} \varphi(2^j t - l)$

$$g_j(t) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} d_l^{(j)} \varphi(2^j t - l)$$

现在一方面

$$\begin{aligned} f_j(t) &= f_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k^{(j-1)} \varphi(2^{j-1} t - k) + \sum_{k \in \mathbf{Z}} d_k^{(j-1)} \psi(2^{j-1} t - k); \end{aligned}$$

另一方面又有

$$\begin{aligned} f_j(t) &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^{(j)} \varphi(2^j t - l) \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^{(j)} \left\{ \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_{l-2k} \varphi(2^{j-1} t - k) + \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_{l-2k} \psi(2^{j-1} t - k) \right\}. \end{aligned}$$

由此可得

$$c_k^{(j-1)} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} a_{l-2k} c_l^{(j)},$$

$$d_k^{(j-1)} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} b_{l-2k} c_l^{(j)}.$$

因此在作小波分解时，系数的计算过程可表示为

$$\begin{array}{ccccccccc} & & d^{(N-1)} & & d^{(N-2)} & & & & d^{(s)} \\ & \nearrow & & \nearrow & & & & \nearrow & \\ c^{(N)} & \longrightarrow & c^{(N-1)} & \longrightarrow & c^{(N-2)} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & c^{(s)} \end{array}$$

这里 $c^{(j)}$ 表示序列 $\{c_k^{(j)}\}$，$d^{(j)}$ 表示序列 $\{d_k^{(j)}\}$。

类似地我们也可以建立重建算法：

$$\begin{aligned} f_j(t) &= f_{j-1}(t) + g_{j-1}(t) \\ &= \sum_{l \in \mathbf{Z}} c_l^{(j-1)} \varphi(2^{j-1} t - l) + \sum_{l \in \mathbf{Z}} d_l^{(j-1)} \psi(2^{j-1} t - l) \end{aligned}$$

现在令 $2^{j-1} t - l = x$，则

$$\begin{aligned}\varphi(2^{j-1}t-l)&=\varphi(x)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k\varphi(2x-k)\\&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}p_k\varphi(2^jt-2l-k)。\end{aligned}$$

同理，$\psi(2^{j-1}t-l)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}q_k\varphi(2^jt-2l-k)$

再令 $2l+k=n$，则 $k=n-2l$ 并代入上式，得

$$\begin{aligned}f_j(t)&=\sum_{l\in\mathbf{Z}}\left\{\left[c_l^{(j-1)}\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_{n-2l}+d_l^{(j-1)}\sum_{n\in\mathbf{Z}}q_{n-2l}\right]\varphi(2^jt-n)\right\}\\&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\left(\sum_{l\in\mathbf{Z}}c_l^{(j-1)}p_{n-2l}+d_l^{(j-1)}q_{n-2l}\right)\varphi(2^jt-n)。\end{aligned}$$

另一方面，又有 $f_j(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n^{(j)}\varphi(2^jt-n)$，

所以得到 $$c_n^{(j)}=\sum_{l\in\mathbf{Z}}c_l^{(j-1)}p_{n-2l}+d_l^{(j-1)}q_{n-2l}。$$

因此系数的重构过程为

$$\begin{array}{ccccccccc}d^{(s)} & & d^{(s+1)} & & & & d^{(N-1)} & & \\ & \searrow & & \searrow & & & & \searrow & \\ c^{(s)} & \longrightarrow & c^{(s+1)} & \longrightarrow & c^{(s+2)} & \cdots & c^{(N-1)} & \longrightarrow & c^{(N)}\end{array}$$

长期以来，无论是在数学上还是在工程技术上，把一个函数展开为一个级数是非常有用的。一个函数的级数展开式，就类似于在一个 n 维欧氏空间中的向量表示成基的线性组合，级数展开的系数就相当于组合系数或坐标，要使组合系数最简单，最好是取标准正交基，幂级数展开的基 $\{1,x-x_0,(x-x_0)^2,\cdots\}$ 一般不是标准正交基。傅里叶级数是把一个周期函数按三角函数系展开，$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kt+b_k\sin kt$，

$a_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt\,dt=(f(t),\cos kt)$，

$b_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt\,dt=(f(t),\sin kt)$，

$\{1, \cos kt, \sin kt, k=1, 2, \cdots\}$ 是一个标准正交系。但由于对任意的 k，$\cos kt$ 和 $\sin kt$ 都不趋于零，所以傅里叶级数的每一项都将涵盖整个实数轴。

现设 $f(t)\in L^2$，则 $f(t)=g_N(t)+g_{N-1}(t)+\cdots+g_s(t)+R_N(t)$，当 $\|R_N(t)\|$ 充分小时，$f(t)\doteq f_N^{(s)}(t)=g_N(t)+g_{N-1}(t)+\cdots+g_s(t)$，其中 $g_l(t)\in W_l$，$g_l(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}q_k^{(l)}\psi(2^lt-k)$，这就是说，$f_N^{(s)}(t)$ 可以分解成各小波分量 $f_N^{(s)}(t)=g_N(t)+g_{N-1}(t)+\cdots+g_s(t)$，各小波分量还可以进一步分解为标准正交基的组合。

$$
\begin{aligned}
f_N^{(s)}(t) &= g_N(t)+g_{N-1}(t)+\cdots+g_s(t)\\
&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}q_k^{(N)}\psi(2^Nt-k)+\sum_{k\in\mathbf{Z}}q_k^{(N-1)}\psi(2^{N-1}t-k)+\cdots+\\
&\quad\ \sum_{k\in\mathbf{Z}}q_k^{(s)}\psi(2^st-k)\\
&=\sum_{l=s}^{N}\sum_{k\in\mathbf{Z}}q_k^{(l)}\psi(2^lt-k)。
\end{aligned}
$$

这是小波级数 $f(t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{mn}\psi_{mn}(t)$ 的一个近似，当上式令 $N\to+\infty$，$s\to-\infty$ 时，就是小波级数。由于 $\overline{\mathrm{span}\{\psi(2^lt-k), k\in\mathbf{Z}\}}$ 对不同的 l，构成相互正交的子空间 W_l，所以在小波级数 $f(t)=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_{mn}\psi_{mn}(t)$ 中对不同的 m，反映了 $f(t)$ 在各小波空间 W_m 的特性。此外，由于 $\psi(t)$ 以一定的速度趋向于零，所以级数的每一项都在一定程度上刻画了 $f(t)$ 在某一局部区域的情况。小波级数不仅可以逐项求导，逐项求积，还能同时进行时域和频域的局部分析。

§3.6 具有紧支集的正交小波基

正交小波按照实际应用的需要可以分为两类：一类是小波母函数 $\psi(t)$ 是一个频谱有限函数，即 $\hat{\psi}(\omega)$ 有紧支集，$\mathrm{supp}\,\hat{\psi}\subset[a, b]$，这时 $\psi(t)$ 不可能有紧支集，这一类小波常常称为 Meyer 型小波。另一

类小波是 $\psi(t)$ 有紧支集（这时当然 $\hat{\psi}(\omega)$ 不可能有紧支集），这种小波是由比利时数学家 Daubechies 首先构造出来的，故称 Daubechies 型小波。

从前面构造正交小波基的多分辨分析方法可以看到，双尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n\in Z}p_n\varphi(2t-n)$ 对正交小波母函数 $\psi(t)$ 的构造，起了很关键的作用。特别是数列 $\{p_n\}$ 的性质，对小波母函数的性质至关重要，如果 $\sum_{n\in Z}p_n\varphi(2t-n)$ 收敛快，则当然 $\sum_{n\in Z}(-1)^n\overline{p}_{1-n}\varphi(2t-n)$ 收敛也快。如果 $\{p_n\}$ 只有有限项非零，那么 $\psi(t)=\sum_{n\in Z}(-1)^n\overline{p}_{1-n}\varphi(2t-n)$ 的构造则更简单，特别当 $\varphi(t)$ 有紧支集时，$\psi(t)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n\overline{p}_{1-n}\varphi(2t-n)$ 也有紧支集。根据前面的讨论，要构造小波函数 $\psi(t)$，可以先构造尺度函数 $\varphi(t)$，然后由双尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n\in Z}p_n\varphi(2t-n)$，求出序列 $\{p_n\}$，继而求出 $\psi(t)$。现在如果已知序列 $\{p_n\}$，通过这个序列来求解双尺度方程得到 $\varphi(t)$，继而可求出 $\psi(t)$。

我们现在考虑有限序列 $c_0, c_1, \cdots, c_N$，根据有限双尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$ 构造尺度函数的问题。这里有两个问题需要解决：其一，是否任意给出一组常数 $c_0, c_1, \cdots, c_N$，都能由方程 $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$ 解出 $\varphi(t)$，且 $\varphi(t)$ 是尺度函数。其二，给定一组常数 $c_0, c_1, \cdots, c_N$，怎样由这一组常数来求出方程 $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$ 的解。

先讨论第二个问题。

方法一：先对有限双尺度方程两边作傅里叶变换

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}c_n e^{-i\frac{n\omega}{2}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

记 $H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}c_n e^{-in\omega}$，则

$$
\begin{aligned}
\hat{\varphi}(\omega) &= H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\\
&= H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{4}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{4}\right)\\
&= \cdots\\
&= H\left(\frac{\omega}{2}\right)H\left(\frac{\omega}{4}\right)\cdots H\left(\frac{\omega}{2^k}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^k}\right)\\
&= \prod_{j=1}^{k}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2^k}\right)。
\end{aligned}
$$

如果极限 $\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$ 存在，则得到 $\hat{\varphi}(\omega)=\prod_{j=1}^{\infty}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)\hat{\varphi}(0)$，取 $\hat{\varphi}(0)=1$，两边作傅里叶逆变换得 $\varphi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{j=1}^{\infty}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)e^{i\omega t}d\omega$，这种方法的困难之处在于极限 $\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{k}H\left(\frac{\omega}{2^j}\right)$。

方法二：迭代方法。

定义一个映射 T：$T[\varphi(t)]=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$。

取任意一个有紧支集的函数 $\varphi_0(t)$，作为迭代初始函数。

$$\varphi_1(t)=T\varphi_0(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi_0(2t-n),$$

$$\varphi_2(t)=T\varphi_1(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi_1(2t-n),$$

$$\cdots$$

$$\varphi_m(t)=T\varphi_{m-1}(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi_{m-1}(2t-n)。$$

如果极限 $\lim_{m\to\infty}\varphi_m(t)=\varphi(t)$，则显然 $\varphi(t)$ 就是方程的解。当然实

际计算时，只要取适当大的 m 即可得近似解。

方法三：求解 $\varphi(t)$的离散值。

因为 $\varphi(t)$有紧支集，不妨设 $\mathrm{supp}\varphi\subset(0,N)$，则对于正整数 l，$\varphi(l)=0$，$l\neq 1,2,\cdots,N-1$。

由方程 $\varphi(t)=\sum\limits_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$ 得

$$\varphi(1)=c_0\varphi(2)+c_1\varphi(1),$$

$$\varphi(2)=c_0\varphi(4)+c_1\varphi(3)+c_2\varphi(2)+c_3\varphi(1),$$

$$\cdots$$

$$\varphi(N-2)=c_{N-3}\varphi(N-1)+c_{N-2}\varphi(N-2)+$$
$$c_{N-1}\varphi(N-3)+c_N\varphi(N-4),$$

$$\varphi(N-1)=c_{N-1}\varphi(N-1)+c_N\varphi(N-2).$$

这是一个以 $\varphi(1)$，$\varphi(2)$，…，$\varphi(N-1)$为未知数的线性方程组，由此求得 $\varphi(t)$的一组离散值 $\varphi(l)$，$l=1,2,\cdots,N-1$。

再利用方程 $\varphi\left(\frac{k}{2}\right)=\sum\limits_{n=0}^{N}c_n\varphi(k-n)$，类似地可求出 $\varphi\left(\frac{k}{2}\right)$，$0<\frac{k}{2}<N$，$k$ 为正整数。

重复以上过程，可求得 $\varphi\left(\frac{k}{2^m}\right)$的值，$m$ 可根据需要选取，如果只进行数值计算，有了 $\varphi(t)$的离散值就够了，如果要求 $\varphi(t)$的解析式，可通过插值或拟合的方法求近似表达式。

值得注意的是，上述三种方法都是在已知 c_0，c_1，…，c_N 的情况下，通过方程 $\varphi(t)=\sum\limits_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$，求得 $\varphi(t)$，但这样求得的 $\varphi(t)$还不一定能够成为多分辨分析中的尺度函数。

那么在什么情况下，方程 $\varphi(t)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}c_n\varphi(2t-n)$ 的解能满足尺度函数的条件呢？也就是前面提出的第一个问题。

由定理 3.10 可知，如果方程 $\varphi(t)=\sum_{n\in Z}c_n\varphi(2t-n)$ 的解 $\varphi(t)$ 是多分辨分析的尺度函数，则必有 $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\equiv 1$。这是尺度函数的一个必要条件，那么要满足这个必要条件 $\{c_n\}$ 应具有什么性质。

$$
\begin{aligned}
|H(\omega)|^2 &= \frac{1}{4}\Big(\sum_{n\in Z}c_n e^{-in\omega}\Big)\Big(\overline{\sum_{m\in Z}c_m e^{-im\omega}}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\Big(\sum_{n\in Z}c_n e^{-in\omega}\Big)\Big(\sum_{m\in Z}\bar{c}_m e^{im\omega}\Big)\\
&= \frac{1}{4}\sum_{n\in Z}\sum_{m\in Z}c_n\bar{c}_m e^{-i(n-m)\omega}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{k\in Z}\sum_{n\in Z}c_n\bar{c}_{n-k}e^{-ik\omega}，\text{这里 } k=n-m。
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|H(\omega+\pi)|^2 &= \frac{1}{4}\sum_{k\in Z}\sum_{n\in Z}c_n\bar{c}_{n-k}e^{-ik\omega}\cdot e^{-ik\pi}\\
&= \frac{1}{4}\sum_{k\in Z}(-1)^k\sum_{n\in Z}c_n\bar{c}_{n-k}e^{-ik\omega}。
\end{aligned}
$$

要使 $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\equiv 1$，

应有 $\frac{1}{4}\sum_{k\in Z}[1+(-1)^k]\Big[\sum_{n\in Z}c_n\bar{c}_{n-k}\Big]e^{-ik\omega}\equiv 1$，对任意的 ω 成立，只能 $k=0$，所以有 $\sum_{n\in Z}c_n\bar{c}_n=2$。

又因为 $\hat{\varphi}(\omega)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$，令 $\omega=0$，得

$\hat{\varphi}(0)=H(0)\hat{\varphi}(0)$，$\hat{\varphi}(0)\neq 0$，所以 $H(0)=1$，即 $\frac{1}{2}\sum_{n\in Z}c_n=1$。

再由 $|H(0)|^2+|H(\pi)|^2=1$，

得
$$
\begin{aligned}
H(\pi) &= \frac{1}{2}\sum_{n\in Z}c_n e^{-in\pi}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{n\in Z}(-1)^n c_n=0，
\end{aligned}
$$

即奇数项之和等于偶数项之和：$\sum_{l\in\mathbf{Z}}(-1)^{2l-1}c_{2l-1}+\sum_{l\in\mathbf{Z}}(-1)^{2l}c_{2l}=0$。

综上所述，当$\{c_n\}$满足下列条件时，双尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n\varphi(2t-n)$ 的解才有可能成为多分辨分析的尺度函数。

(1) $\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n\bar{c}_n=2$；

(2) $\sum_{n\in\mathbf{Z}}c_n=2$；

(3) $\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_{2k-1}=1$。

这三个条件就是 $\varphi(t)$成为多分辨分析的尺度函数的必要条件。下面再讨论充分条件。

还是就有限项数列$\{c_n\}$的情况来讨论，且假定 c_n 是实数，当 $n>N$ 时，$c_n=0$。

记 $m(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}c_nz^n$，这里 z 是一个复数，$m(z)$是一个复变量的 N 次实系数多项式。

$$H(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}c_n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\omega}=m(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega})。$$

$H(\pi)=m(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi})=m(-1)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}(-1)^nc_n=0$，即 $z=-1$ 是方程 $m(z)=0$ 的一个根，设这个根是 l 重根，这样 $m(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^lQ(z)$，$Q(z)=\sum_{j=1}^{N-l}d_jz^j$。

定理 3.13（Daubechies） 若 $\sum_{j=1}^{N-l}d_j=1$，$\sup_{|z|=1}|Q(z)|<2^{l-1}$，$\sum_{n=0}^{N}c_n\bar{c}_n=2$，则双尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$，可由迭代方法求得连续解，且在 $\hat{\varphi}(0)=1$ 条件下，这个解是多分辨分析的尺度函数。

证明 略。

这样，求一个有紧支集的正交小波母函数的问题可归结为如下步骤：

第一步，寻找一个实系数的多项式 $m(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N}c_n z^n$，满足下列条件：

(1) $\sum_{n=0}^{N}c_n^2=2$；

(2) $\sum_{n=0}^{k}c_{2n}=\sum_{n=0}^{k}c_{2n+1}=1,\ k=\left[\frac{n}{2}\right]$；

(3) 存在 $l\geqslant 1$ 的整数，使 $m(z)=\left(\frac{1+z}{2}\right)^l Q(z)$，且 $\sup\limits_{|z|=1}|Q(z)|<2^{l-1}$。

第二步，根据系数 $c_0, c_1, \cdots, c_N$，由双尺度方程根据前面所讲的方法二，迭代求出 $\varphi(t)$。

第三步，由 $\psi(t)=\sum\limits_{n=-(N-1)}^{1}(-1)^n c_{1-n}\varphi(2t-n)$，得到有紧支集的正交小波母函数。

例 3.19 $c_0=\frac{1\mp\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_1=\frac{3\mp\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_2=\frac{3\pm\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},\ c_3=\frac{1\pm\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$，

$$H(\omega)=m(e^{-i\omega})=\left[\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right]^2\frac{1}{2}\left[(1\mp\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})e^{-i\omega}\right],\ l=2,$$

即 $Q(z)=\frac{1}{2}\left[(1\mp\sqrt{3})+(1\pm\sqrt{3})z\right],\ \sup\limits_{|z|=1}|Q(z)|=\sqrt{3}<2^{l-1}=2$。

由这一组 c_0, c_1, c_2, c_3 通过前面介绍的迭代方法，可求出 $\varphi(t)$，进而求出 $\psi(t)$。

现在通过进一步分析 $m(z)$ 和 $Q(z)$，来导出另一种构造有紧支集的正交小波母函数的方法。

由 $|H(\omega)|^2+|H(\omega+\pi)|^2\equiv 1$，得 $|m(e^{-i\omega})|^2+|m(e^{-i(\omega+\pi)})|^2\equiv 1$。

$$\begin{aligned}|m(e^{-i\omega})|^2&=\left|\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right|^{2l}|Q(e^{-i\omega})|^2\\&=\left[\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)\left(\frac{1+e^{i\omega}}{2}\right)\right]^l|Q(e^{-i\omega})|^2\\&=\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right)^l|Q(e^{-i\omega})|^2.\end{aligned}$$

因为 $Q(z)$ 是实系数多项式，所以 $|Q(e^{-i\omega})|^2$ 必为 $\cos\omega$ 的多项式，且 $\cos\omega = 1 - 2\sin^2\frac{\omega}{2}$，因此 $|Q(e^{-i\omega})|^2$ 可以作为 $\sin^2\frac{\omega}{2}$ 的多项式，记为 $p\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$。

令 $y = \cos^2\frac{\omega}{2}$，则 $\sin^2\frac{\omega}{2} = 1 - y$，$|m(e^{-i\omega})|^2 = \left|\cos^2\frac{\omega}{2}\right|^l p\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right) = y^l p(1-y)$。类似地有 $|m(e^{-i(\omega+\pi)})|^2 = \left|\sin^2\frac{\omega}{2}\right|^l p\left(\cos^2\frac{\omega}{2}\right) = (1-y)^l p(y)$。

$y^l p(1-y) + (1-y)^l p(y) = 1$，$y \in [0, 1]$，

因为 $|Q(e^{-i\omega})|^2 \geqslant 0$，所以 $p(1-y) \geqslant 0$，$p(y) \geqslant 0$。

现在问题是，对于多项式 $p(y)$ 是否存在实系数多项式 $Q(z)$，使 $|Q(e^{-i\omega})|^2 = p\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$。下面的定理给出了肯定的回答。

定理 3.14 对于上述多项式 $p(y)$，必存在实系数多项式 $Q(z)$，使 $|Q(e^{-i\omega})|^2 = p\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$。且满足 $y^l p(1-y) + (1-y)^l p(y) = 1$ 的多项式一定可以分解为 $p(y) = p_l(y) + y^l R\left(\frac{1}{2} - y\right)$。其中，$p_l(y) = \sum_{j=0}^{l-1}\binom{l-1+j}{j}y^j$，这里 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$。

$R\left(\frac{1}{2} - y\right)$ 是满足 $R\left(\frac{1}{2} - y\right) = -R\left(\frac{1}{2} + y\right)$ 的多项式。

证明 略。

根据这些结论，现在可以按下列步骤构造有紧支集的尺度函数。

第一步，选定正整数 l。

第二步，选取多项式 R，满足：

(1) $R\left(\frac{1}{2} - y\right) = -R\left(\frac{1}{2} + y\right)$；

(2) $p_l(y) + y^l R\left(\frac{1}{2} - y\right) \geqslant 0$，$0 \leqslant y \leqslant 1$；

(3) $\sup_{0\leqslant y\leqslant 1}\left(p_l(y)+y^lR\left(\frac{1}{2}-y\right)\right)\leqslant 2^{2(l-1)}$；

这里 $p_l(y)=\sum_{j=0}^{l-1}\begin{bmatrix}l-1+j\\ j\end{bmatrix}y^j$。

第三步，令 $|Q(e^{-i\omega})|^2=p_l\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)+\left(\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^lR\left(\frac{1}{2}\cos\omega\right)$。

特别地，当 $R\left(\frac{1}{2}-y\right)=0$ 时，$p_l(y)$就是一个正系数多项式。

具有紧支集的正交小波在时间域上有极好的局部性，很适宜在时域上做局部分析。但时域局部性和频域局部性常常是相互制约的。因为 $f(t)$和$\hat{f}(\omega)$不可能同时有紧支集。要使$\hat{f}(\omega)$趋于零的速度加快，就要使 $f(t)$更光滑。但对尺度函数而言，$\varphi(t)$的支集长度越短，光滑性就越差，这时$\hat{\varphi}(\omega)$的局部性就越差。双尺度方程的解的光滑性与序列$\{c_n\}$的非零项的项数有关。如果 $\varphi(t)$ k 阶光滑，$\mathrm{supp}\varphi\subset[0,N]$ $\varphi(t)=\sum_{n=0}^{N}c_n\varphi(2t-n)$，则 $N\geqslant k+2$。

§3.7 S-空间中的正交小波

正交小波母函数 $\psi(t)$及其傅里叶变换$\hat{\psi}(\omega)$的衰减性、光滑性、对称性等是衡量一个小波好坏的主要方面。而这些性质又常常是相互制约的。Haar 小波和 Shannon 小波是两个典型的例子。那么是否能兼顾时域和频域两个方面的需要，构造一种相对较优的小波呢。

Shannon 小波 $\psi(t)$在 $t\to\infty$时，$\psi(t)=O\left(\frac{1}{t}\right)$，通过改进取样定理，可以构造出改进的 Shannon 小波 $\psi(t)$，当 $t\to\infty$时，$\psi(t)=O\left(\frac{1}{t^N}\right)$，$N=2,3,\cdots$ 当然随着 N 的增大，$\psi(t)$将非常复杂，给计算带来极大的不便，所以 N 一般不宜取得太大。

现在引进一种函数空间，称为 S-空间，这里不准备引进 S-空间

的严格定义及性质，只是指出 S-空间中的函数的三条重要特性：

(1) 如果 $f(t) \in S$，则 $f(t)$是任意次可导；

(2) 如果 $f(t) \in S$，则对任意正整数 N，有 $\lim_{t \to \infty} f(t) \cdot t^N = 0$，即当 $t \to \infty$ 时，$f(t)$的趋于零的速度比任意次多项式的倒数的趋于零的速度更快；

(3) 如果 $f(t) \in S$，则必有 $\hat{f}(\omega) \in S$。

S-空间又称急减函数空间或速降函数空间。S-空间中的函数无论在时域或频域上都有很好的局部性和光滑性。因此，在 S-空间中的正交小波母函数当然有很理想的性质。

以 C_0^∞ 表示 $\mathbf{R}$ 上任意次可导，且具有紧支集的函数全体所成的函数空间。现在 C_0^∞ 上找一个函数 $\hat{\varphi}(\omega)$，使 $\hat{\varphi}(\omega)$的傅里叶逆变换 $\varphi(t)$成为多分辨分析中的尺度函数。

由 $\hat{\psi}(\omega) = -e^{-i\frac{\omega}{2}} \overline{\left[\frac{\hat{\varphi}(\omega+2\pi)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right]} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$，由于 $\hat{\varphi}(\omega) \in C_0^\infty$，由此式可知 $\hat{\psi}(\omega) \in C_0^\infty$。由于 $C_0^\infty \subset S$，所以 $\hat{\psi}(\omega) \in S$，因此，$\hat{\psi}(\omega)$的傅里叶逆变换 $\psi(t)$就是 S-空间中的正交小波母函数。

现举例说明构造 S-空间中正交小波母函数的方法。

取 b-频谱有限函数 B_b，并令 $b = 0.9\pi$，设 $f(t) \in B_{0.9\pi}$。以 $T = 2\pi$ 为周期对 $\hat{f}(\omega)$作周期延拓，得 $\hat{f}_T(\omega)$，在 $\omega \in [-\pi, \pi]$ 上，$\hat{f}_T(\omega) = \hat{f}(\omega)$。对 $\hat{f}_T(\omega)$ 作傅里叶展开，得

$$\hat{f}_T(\omega) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} C_n e^{in\xi\omega}，这里\ \xi = \frac{2\pi}{T} = 1,$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}_T(\omega) e^{-in\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{-in\omega} d\omega \\ &= f(-n)。\end{aligned}$$

代入展开式得 $\hat{f}_T(\omega) = \sum\limits_{n\in \mathbf{Z}} f(-n)\mathrm{e}^{-in\omega}$。

令
$$X_{[-\pi,\pi]}(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$$

$$J_{0.1\pi}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{(0.1\pi)^2}{\omega^2-(0.1\pi)^2}} & \omega \in [-0.1\pi, 0.1\pi], \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$$

为使 $J_{0.1\pi}(\omega)$ 光滑化,作卷积 $(X_{[-\pi,\pi]} * J_{0.1\pi})(\omega) = \hat{\varphi}_1(\omega)$,则 $\mathrm{supp}\hat{\varphi}_1 = [-1.1\pi, 1.1\pi]$,且当 $\omega \in [-0.9\pi, 0.9\pi]$ 时,$\hat{\varphi}_1(\omega) = 1$,因此

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \hat{f}_T(\omega)\hat{\varphi}_1(\omega) \\ &= \sum_{n\in \mathbf{Z}} C_n \mathrm{e}^{in\omega}\hat{\varphi}_1(\omega) \\ &= \sum_{n\in \mathbf{Z}} f(-n)\mathrm{e}^{in\omega}\hat{\varphi}_1(\omega) \\ &= \sum_{k\in \mathbf{Z}} f(k)\mathrm{e}^{-ik\omega}\hat{\varphi}_1(\omega)。 \end{aligned}$$

具体如图 3-9 所示。

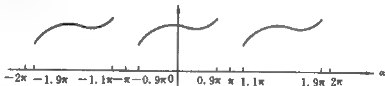


图 3-9

两边作傅里叶逆变换,得

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k\in \mathbf{Z}} f(k)\mathrm{e}^{-ik\omega}\hat{\varphi}_1(\omega)\mathrm{e}^{it\omega}\mathrm{d}\omega \\ &= \sum_{k\in \mathbf{Z}} f(k)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}_1(\omega)\mathrm{e}^{i(t-k)\omega}\mathrm{d}\omega \\ &= \sum_{k\in \mathbf{Z}} f(k)((F^{-1}[\hat{\varphi}_1])(t-k)) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k\in Z} f(k)(F^{-1}[X_{[-\pi,\pi]} * J_{0.1\pi}])(t-k)$$

$$= \sum_{k\in Z} f(k)\{(F^{-1}[X_{[-\pi,\pi]}])(t-k)\cdot (F^{-1}[J_{0.1\pi}])(t-k)\}.$$

$$F^{-1}[X_{[-\pi,\pi]}](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X_{[-\pi,\pi]}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{\sin\pi t}{\pi t}.$$

$$F^{-1}[J_{0.1\pi}](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} J_{0.1\pi}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} J_{0.1\pi}(-x)e^{-ixt}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} J_{0.1\pi}(x)e^{-ixt}dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\hat{J}_{0.1\pi}(t).$$

这里 $\hat{J}_{0.1\pi}(t)$是 $J_{0.1\pi}(\omega)$的傅里叶变换。

由此我们得到

$$f(t) = \sum_{n\in Z} f(n)[F^{-1}\hat{\varphi}_1](t-n)$$

$$= \sum_{n\in Z} f(n)\frac{\sin\pi(t-n)\hat{J}_{0.1\pi}(t-n)}{2\pi^2(t-n)},$$

即对任意的 $f(t)\in B_{0.9\pi}$，都有展开式

$$f(t) = \sum_{n\in Z} f(n)\varphi_1(t-n) = \sum_{n\in Z} f(n)\frac{\sin\pi(t-n)\hat{J}_{0.1\pi}(t-n)}{2\pi^2(t-n)}.$$

所以，这是 $B_{0.9\pi}$上的一个取样定理。但这里的基函数 $\varphi_1(t)$的整数平

移$\{\varphi_1(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$不是$B_{0.9\pi}$的标准正交基，而是一个 Riesz 基(这在下一章我们将给出证明)。

作正交化处理$\hat{\varphi}(\omega)=\dfrac{\hat{\varphi}_1(\omega)}{\left(\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}_1(\omega+2k\pi)|^2\right)^{1/2}}$，然后作傅里叶逆变换得到尺度函数$\varphi(t)$，$\varphi(t)$具有平移正交性，由$\varphi(t)$可生成一个正交多分辨分析。$V_0=\overline{\operatorname{span}\{\varphi(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}}$，$V_m=\{f(2^m t)\mid f(t)\in V_0\}=\overline{\operatorname{span}\{\varphi(2^m t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}}$，再利用$\hat{\psi}(\omega)=-e^{-i\frac{\omega}{2}}\left|\dfrac{\hat{\varphi}(\omega+2\pi)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right|\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$，可求得正交小波母函数$\psi(t)$。在实际计算时$\varphi(t)$不必求出。

我们来分析一下，这样求得的正交小波母函数$\psi(t)$具有什么特性。

因为$\operatorname{supp}\hat{\varphi}_1(\omega)=[-1.1\pi,\ 1.1\pi]$，

所以$\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\omega)=[-1.1\pi,\ 1.1\pi]$。

又因为$\operatorname{supp}\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=[-2.2\pi,\ 2.2\pi]$，且$J_{0.1\pi}(\omega)\in C_0^\infty$，因此可得$\hat{\varphi}_1(\omega)\in C_0^\infty$，$\hat{\varphi}(\omega)\in C_0^\infty$，当然也有$\hat{\psi}(\omega)\in C_0^\infty$。根据傅里叶变换的知识，可知$\psi(t)$属于$S$-空间。

因此我们构造了S-空间中的正交小波母函数$\psi(t)$，$\psi(t)$是一个速降函数，而其傅里叶变换$\hat{\psi}(\omega)$则有紧支集，所以这个小波不仅在时域和频域上都有很好的局部性，且$\psi(t)$和$\hat{\psi}(\omega)$都是任意次可导的，具有极好的光滑性。下面再进一步说明$\psi(t)$的实部和虚部还分别具有对称性。

显而易见，$\hat{\varphi}_1(\omega)$是具有对称性的实函数，且为偶函数，$\hat{\varphi}(\omega)$当然也是实函数，$G(\omega)=\left|\dfrac{\hat{\varphi}(\omega+2\pi)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right|\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$当然也是实函数。

$$\hat{\psi}(\omega)=-e^{-i\frac{\omega}{2}}G(\omega)$$

$$\psi(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}-e^{-i\frac{\omega}{2}}G(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\left[\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)\omega+\mathrm{i}\sin\left(t-\frac{1}{2}\right)\omega\right]\mathrm{d}\omega$$

$$=\psi_1(t)+\mathrm{i}\psi_2(t)。$$

令 $t_1=t-\frac{1}{2}$，则有

$$\psi_1(t)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cos\left(t-\frac{1}{2}\right)\omega\mathrm{d}\omega$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cos t_1\omega\mathrm{d}\omega$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\cos(-t_1)\omega\mathrm{d}\omega。$$

所以 $\psi_1(t)=\psi_1\left(t_1+\frac{1}{2}\right)=\psi_1\left(-t_1+\frac{1}{2}\right)$，即 $\psi_1(t)$是轴对称，其对称轴为 $t=\frac{1}{2}$。

类似地，可证明 $\psi_2(t)$是中心对称，其对称中心为点$\left(\frac{1}{2},0\right)$，$\psi_1(t)$，$\psi_2(t)$的图形如图 3－10 所示。

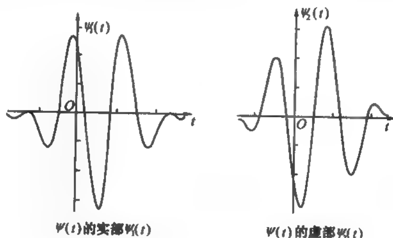


图 3－10

在此我们还得到了 S-空间中的一种取样定理。对于 b 频谱有限函数 $f(t)$，当 $h < \frac{\pi}{b}$ 时，有

$$f(t) = \sum_{n \in Z} f(nh) J_{\beta}(t - nh) \frac{\sin \frac{\pi}{h}(t - nh)}{\frac{\pi}{h}(t - nh)},$$

其中 $J_{\beta}(t)$是 $j(x)$的傅里叶变换。

$$j_{\beta}(x) = \begin{cases} e^{\frac{\beta^2}{x^2-\beta^2}} & |x| < \beta, \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$$

$$\beta = \frac{\pi}{h} - b > 0。$$

这个取样定理的收敛很快，$j_{\beta}(x)$是速降函数，而速降函数的傅里叶变换还是速降函数，但 $J_{\beta}(t)$写不出解析表达式，只能作数值运算。

第四章　小波包及其构造

§4.1　小波包的概念及性质

正交小波基$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$构成$L^2$的一个标准正交基，这样$L^2$中的函数$f(t)$就可以展开为一个小波级数$f(t)=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)$，如果$\psi_{m,n}(t)$有很好的局部性，那么级数中的某几项就可以反映$f(t)$在某局部时段的性质，$\psi_{m,n}(t)$的局部性越好，对$f(t)$的时域分辨率越高。

$\psi_{m,n}(t)$的窗口半径$\frac{1}{2^m}\Delta_\psi$是由两个因素确定，一个是Δ_ψ的大小，这是由$\psi(t)$决定，正如上一章所讨论的，要设法构造局部性好的小波母函数$\psi(t)$，但这常常会受到各种制约。决定$\psi_{m,n}(t)$窗口半径的另一个因素是m，m可以从$-\infty$到$+\infty$，当$m<-N$（这里N是一个大的正整数）时，$\psi_{m,n}(t)$的窗口半径将增大，这样分辨率就降低。随着m的增大，$\psi_{m,n}(t)$的窗口半径减小，分辨率提高，但频谱窗口半径$2^m\Delta_{\hat{\psi}}$却增大，因此时域分辨率的提高，必然导致频域分辨率的降低。对于这个矛盾，单靠小波基的选择是无法解决的。为了解决这个问题，引入小波包的概念，以便把随着m的增大而变宽的频谱窗口再进一步分割变细，从而在提高时域分辨率的同时，提高频域分辨率。

小波包是正交小波基的一个推广。前面我们把L^2分解为小波空间W_m的直和$L^2(\mathbf{R})=\bigoplus_{m\in \mathbf{Z}}W_m$，$\{\psi_{m,n}(t),\ n\in \mathbf{Z}\}$就是小波空间$W_m$的标准正交基，为了避免频谱窗口随$m$的增大而变宽，导致频域分辨

率的降低，我们对较大的 m 对应的 $W_m(m\geqslant 1)$ 再进一步细分 $W_m=\bigoplus_k U_m^{(k)}$，这就是小波包的思想。

要把 W_m 进一步细分为 $U_m^{(k)}$ 的直和，重要的问题是要找出 $U_m^{(k)}$ 的标准正交基。

记 $\mu_0(t)=\varphi(t)$，$\mu_1(t)=\psi(t)$，两尺度关系为

$$\mu_0(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_n\mu_0(2t-n),$$

$$\mu_1(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}q_n\mu_0(2t-n)。$$

这里 $q_n=(-1)^n\overline{p}_{1-n}$。

再记 $P_0(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}p_nz^n$，$P_1(z)=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}q_nz^n$，这里 z 是一个复数。

则
$$\hat{\mu}_0(\omega)=P_0(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_0\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\hat{\mu}_1(\omega)=P_1(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_0\left(\frac{\omega}{2}\right)。$$

为了细分 W_m，现从 $\mu_0(t)$，$\mu_1(t)$ 出发构造函数序列 $\{\mu_k(t),\ k=0,1,2,\cdots\}$。

定义 4.1 设 $\mu_0(t)$ 是正交多分辨分析的一个尺度函数，由

$$\left.\begin{aligned}\mu_{2l}(t)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n\mu_l(2t-n),\\ \mu_{2l+1}(t)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}q_n\mu_l(2t-n)。\end{aligned}\right.\qquad l=0,1,2,\cdots$$

所定义的函数序列 $\{\mu_k(t),\ k=0,1,2,\cdots\}$ 称为由 $\mu_0(t)$ 确定的小波包。

为了讨论小波包的傅里叶变换，对非负整数 k 用二进制数表示 $k=\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\varepsilon_j2^{j-1}$，这里 $\varepsilon_j=0$ 或 1。

定理 4.1 $\hat{\mu}_k(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_j}(e^{-i\frac{\omega}{2^j}})$

证明 由小波包的表示：

$$\hat{\mu}_{2l}(\omega) = P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\hat{\mu}_{2l+1}(\omega) = P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

用归纳法。设 $0 \leqslant k < 2^{S_0}$ 时结论成立。$\hat{\mu}_k(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_j}(e^{-i\frac{\omega}{2^j}})$，这里 S_0 是一个固定的正整数。

现证明：当 $2^{S_0} \leqslant k < 2^{S_0+1}$ 时，结论也成立。

因为 $2^{S_0} \leqslant k < 2^{S_0+1}$，所以，

$$k = \varepsilon_1 2^0 + \varepsilon_2 2^1 + \cdots + \varepsilon_{S_0+1} 2^{S_0}$$

$$= \sum_{j=1}^{S_0+1} \varepsilon_j 2^{j-1},$$

$$\frac{k}{2} = \frac{\varepsilon_1}{2} + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 2^1 + \cdots + \varepsilon_{S_0+1} 2^{S_0-1}$$

$$= \frac{\varepsilon_1}{2} + \sum_{j=1}^{S_0} \varepsilon_{j+1} 2^{j-1}$$

$$= \frac{\varepsilon_1}{2} + \left[\frac{k}{2}\right].$$

这里$\left[\frac{k}{2}\right]$表示$\frac{k}{2}$的整数部分。

令 $l = \left[\frac{k}{2}\right]$，则

$$k = 2\left[\frac{k}{2}\right] + \varepsilon_1$$

$$= 2l + \varepsilon_1$$

$$= \begin{cases} 2l+1 & \varepsilon_1 = 1, \\ 2l & \varepsilon_1 = 0. \end{cases}$$

$$l = \left[\frac{k}{2}\right] \leqslant \sum_{j=1}^{S_0} \varepsilon_{j+1} 2^{j-1} < 2^{S_0},$$

$$\hat{\mu}_k(\omega) = P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}\right)。$$

由归纳假设，$\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_{j+1}}(e^{-i\frac{\omega}{2^j}})$，因此 $\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_{j+1}}(e^{-i\frac{\omega}{2^{j+1}}})$。这就是

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_k(\omega) &= P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&= P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}}) \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_{j+1}}(e^{-i\frac{\omega}{2^{j+1}}}) \\
&= \prod_{j=1}^{\infty} P_{\varepsilon_j}(e^{-i\frac{\omega}{2^j}})。
\end{aligned}$$

由于小波包是正交小波的一个推广，所以小波包既保留了正交小波的良好性质，而且把正交小波的性质又作了进一步的推广。

$\mu_0(t) = \varphi(t)$ 是尺度函数，具有平移正交性，对于小波包中的任一函数 $\mu_k(t)$，$k = 1, 2, \cdots$ 都具有像 $\mu_0(t)$一样的平移正交性。

定理 4.2　$\{\mu_k(t), k = 0, 1, 2, \cdots\}$ 是由尺度函数 $\mu_0(t)$确定的小波包，则对任意的非负整数 k，$\mu_k(t)$具有平移正交性。即 $(\mu_k(t-n), \mu_k(t-m)) = \delta_{nm}$。

证明　用归纳法，当 $k = 0$ 时，显然成立。

设当 $0 < k < 2^{S_0}$ 时成立，则当 $2^{S_0} \leqslant k < 2^{S_0+1}$ 时，由 Parseval 等式

$$\begin{aligned}
&(\mu_k(t-n), \mu_k(t-m)) \\
&= \frac{1}{2\pi}(e^{-in\omega}\hat{\mu}_k(\omega), e^{-im\omega}\hat{\mu}_k(\omega)) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\mu}_k(\omega)|^2 e^{i(m-n)\omega} d\omega
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in Z}\int_{4l\pi}^{4(l+1)\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2\left|\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{l\in Z}\int_{0}^{4\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2\left|\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 e^{i(m-n)\omega}\sum_{l\in Z}\left|\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right|^2 d\omega。$$

由归纳假设$\mu_{[\frac{k}{2}]}(t)$具有平移正交性，故应有

$$\sum_{l\in Z}\left|\hat{\mu}_{[\frac{k}{2}]}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right|^2 = 1。$$

所以 $(\mu_k(t-n),\mu_k(t-m))$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{2\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega + \int_{2\pi}^{4\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{2\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega + \int_{0}^{2\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-\frac{i}{2}(\omega+2\pi)})|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{2\pi}|P_{\varepsilon_1}(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega + \int_{0}^{2\pi}|P_{\varepsilon_1}(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 e^{i(m-n)\omega}d\omega\right]。$$

若 $\varepsilon_1 = 0$，则

$$|P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 = \left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2,$$

$$|P_0(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 = \left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2;$$

若 $\varepsilon_1 = 1$，则

$$|P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 = \left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2,$$

$$|P_1(-e^{-i\frac{\omega}{2}})|^2 = \left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2。$$

由于 $\mu_0(t)$ 具有平移正交性，故有 $\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\equiv 1$。由此无论 $\varepsilon_1=0$ 还是 $\varepsilon_1=1$，都可以得到

$$
\begin{aligned}
&(\mu_k(t-n),\ \mu_k(t-m))\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\left|H\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2+\left|H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)\right|^2\right]e^{i(m-n)\omega}d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(m-n)\omega}d\omega=\delta_{mn}。
\end{aligned}
$$

上一章我们已经讨论过 W_m 和 V_m 的关系，$\{\psi_{m,n}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 W_m 的标准正交基，$\{\varphi_{m,n}(t),\ n\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_m 的标准正交基，由于 $W_m\perp V_m$，故对任意的 $m,n\in\mathbf{Z}$，都有 $(\mu_0(t-n),\ \mu_1(t-m))=0$。小波包把这种正交关系推广到 $\mu_{2l}(t)$ 和 $\mu_{2l+1}(t)$。

定理 4.3 $\{\mu_k(t),\ k=0,1,\cdots\}$ 是小波包，则对任意的 $m,n\in\mathbf{Z}$，都有 $(\mu_{2l}(t-n),\ \mu_{2l+1}(t-m))=0$。

证明 $\hat{\mu}_1(\omega)=P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\mu}_0\left(\frac{\omega}{2}\right)$，$P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})=H\left(\frac{\omega}{2}\right)$，

$$P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})=-e^{-i\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)},$$

令 $z=e^{-i\omega}$，则 $-z=e^{-i(\omega+\pi)}$，$|z|=1$。

$P_0(z)=H(\omega)$，$P_0(-z)=H(\omega+\pi)$，

$P_1(z)=-e^{-i\omega}\overline{H(\omega+\pi)}$，$P_1(-z)=-e^{-i(\omega+\pi)}\overline{H(\omega+2\pi)}=e^{i\omega}\overline{H(\omega)}$，

所以

$$
\begin{aligned}
&P_0(z)\overline{P_1(z)}+P_0(-z)\overline{P_1(-z)}\\
&=-H(\omega)e^{i\omega}H(\omega+\pi)+H(\omega+\pi)e^{i\omega}H(\omega)\equiv 0。
\end{aligned}
$$

由 Parseval 等式

$$
\begin{aligned}
&(\mu_{2l}(t-n),\ \mu_{2l+1}(t-m))\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\mu}_{2l}(\omega)\hat{\mu}_{2l+1}(\omega)e^{i(m-n)\omega}d\omega
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{p_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})}e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Z}\int_{4j\pi}^{4(j+1)\pi}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right)\right|^2 P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{p_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})}e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}\sum_{j\in Z}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+2j\pi\right)\right|^2 P_0(e^{-i(\frac{\omega}{2}+2j\pi)})\overline{p_1(e^{-i(\frac{\omega}{2}+2j\pi)})}e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})e^{i(m-n)\omega}\sum_{j\in Z}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+2j\pi\right)\right|^2 d\omega。$$

由于 $\mu_l(t)$具有平移正交性，故 $\sum_{j\in Z}\left|\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}+2j\pi\right)\right|^2 = 1$。

故有

$$(\mu_{2l}(t-n),\ \mu_{2l+1}(t-m))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{4\pi}P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})}e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi}P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})}e^{i(m-n)\omega}d\omega+\int_{2\pi}^{4\pi}P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})}e^{i(m-n)\omega}d\omega\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})}+P_0(-e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{P_1(-e^{-i\frac{\omega}{2}})}]e^{i(m-n)\omega}d\omega$$

$$= 0。$$

§4.2 小波包对频域的分割

一个尺度函数 $\varphi(t)$可以实现对 L^2 空间的一种分解 $L^2 = \overline{\bigcup_{m\in Z} V_m}$，且 $V_m = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_{m,n}(t),\ n\in Z\}}$。一个小波母函数 $\psi(t)$也可以实现对 L^2 空间的一种分解，而且是一种正交分解，$L^2 = \bigoplus_{m\in Z} W_m$，$W_m \perp W_n$，$m \neq n$，$\{\psi_{m,n}(t),\ n\in Z\}$ 是 W_m 的标准正交基。

现在考虑对 W_m 的进一步分解，以提高频域分辨率，当然这种分解最理想的是正交分解。

为了叙述方便，引进记号，记 $V_m = U_m^{(0)}$，$W_m = U_m^{(1)}$，

则$U_m^{(0)} \cup U_m^{(1)} = U_{m+1}^{(0)}$，且$U_m^{(0)} \perp U_m^{(1)}$。

$$U_m^{(0)} = \overline{\text{span}\{\varphi_{m,n}(t), n \in \mathbf{Z}\}} = \overline{\text{span}\{2^{\frac{m}{2}}\mu_0(2^m t - n), n \in \mathbf{Z}\}},$$

$$U_m^{(1)} = \overline{\text{span}\{\psi_{m,n}(t), n \in \mathbf{Z}\}} = \overline{\text{span}\{2^{\frac{m}{2}}\mu_1(2^m t - n), n \in \mathbf{Z}\}}。$$

类似地，令$U_m^{(l)} = \overline{\text{span}\{2^{\frac{m}{2}}\mu_l(2^m t - n), n \in \mathbf{Z}\}}$，那么$U_m^{(l)}$是一个怎样的空间，具有什么性质，与$U_m^{(0)}$，$U_m^{(1)}$又有什么关系呢。

定理 4.4 设l为非负整数，$U_m^{(2l)} \cup U_m^{(2l+1)} = U_{m+1}^{(l)}$，且$U_m^{(2l)} \perp U_m^{(2l+1)}$。

证明 因为$(\mu_{2l}(2^m t - j), \mu_{2l+1}(2^m t - k)) = 0$，对任意的$j, k \in \mathbf{Z}$成立，所以$U_m^{(2l)} \perp U_m^{(2l+1)}$成立。

现需证明：$U_m^{(2l)} \subset U_m^{(l)}$，$U_m^{(2l+1)} \subset U_m^{(l)}$，且$U_m^{(l)} \subset U_m^{(2l)} \cup U_m^{(2l+1)}$。

设$f(t)$是$U_m^{(2l)}$中的任意函数，显然$\{2^{\frac{m}{2}}\mu_{2l}(2^m t - n), n \in \mathbf{Z}\}$是$U_m^{(2l)}$的标准正交基，$f(t) = \sum\limits_{j \in \mathbf{Z}} C_f(2l, m, j)\mu_{2l}(2^m t - j)$，其中$C_f(2l, m, j)$是$f(t)$的展开系数。

根据小波包的定义，$\mu_{2l}(2^m t - j) = \sum\limits_{n \in \mathbf{Z}} p_n \mu_l(2^{m+1} t - 2j - n)$，而$\overline{\text{span}\{2^{\frac{m+1}{2}}\mu_l(2^{m+1} t - n), n \in \mathbf{Z}\}} = U_{m+1}^{(l)}$，所以$\mu_{2l}(2^m t - j) \in U_{m+1}^{(l)}$，$f(t) \in U_{m+1}^{(l)}$，即$U_m^{(2l)} \subset U_{m+1}^{(l)}$。

类似地，可证$U_m^{(2l+1)} \subset U_{m+1}^{(l)}$。

再证$U_{m+1}^{(l)} \subset U_m^{(2l)} \cup U_m^{(2l+1)}$。

只需证$\mu_l(2^{m+1} t - j) = \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} p_k \mu_{2l}(2^m t - k) + \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} q_k \mu_{2l+1}(2^m t - k)$即可。

$$| H(\omega) |^2 = \frac{1}{4}\Big(\sum_{n \in \mathbf{Z}} p_n e^{-in\omega}\Big)\Big(\sum_{k \in \mathbf{Z}} \overline{p}_k e^{ik\omega}\Big)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{n \in \mathbf{Z}}\sum_{k \in \mathbf{Z}} p_n \overline{p}_k e^{-i(n-k)\omega}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z} p_n \overline{p}_{n-m} e^{-imw}。$$

同理，$|H(\omega+\pi)|^2 = \frac{1}{4}\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}(-1)^m p_n \overline{p}_{n-m} e^{-im\omega}$。

由 $\mu_k(t)$ 的平移正交性，可知 $|H(\omega)|^2 + |H(\omega+\pi)|^2 \equiv 1$。即

$\sum_{m\in Z}\left[\sum_{n\in Z} p_n\overline{p}_{n-m} + (-1)^m p_n \overline{p}_{n-m}\right] e^{-im\omega} \equiv 4$，对任意的 ω 成立。

所以，只能 $\sum_{m\in Z}\left[\sum_{n\in Z} p_n\overline{p}_{n-m} + (-1)^m p_n\overline{p}_{n-m}\right] = 4\delta_{om}$。

现在，证明 $\mu_l(2^{m+1}t-j) = \frac{1}{4}\sum_{k\in Z}[\overline{p}_{j-2k}\mu_{2l}(2^m t-k) + \overline{q}_{j-2k}\mu_{2l+1}(2^m t - k)]$。

由于
$$\mu_{2l}(2^m t - k) = \sum_{n\in Z} p_n \mu_l(2^{m+1}t - 2k - n),$$
$$\mu_{2l+1}(2^m t - k) = \sum_{n\in Z} q_n \mu_l(2^{m+1}t - 2k - n),$$

所以
$$\frac{1}{4}\sum_{k\in Z}[\overline{p}_{j-2k}\mu_{2l}(2^m t - k) + \overline{q}_{j-2k}\mu_{2l+1}(2^m t - k)]$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k\in Z}[\overline{p}_{j-2k}\sum_{n\in Z} p_n\mu_l(2^{m+1}t - 2k - n)$$
$$+ \overline{q}_{j-2k}\sum_{n\in Z} q_n\mu_l(2^{m+1}t - 2k - n)]$$
$$= \frac{1}{4}\sum_{k\in Z}\sum_{n\in Z}(\overline{p}_{j-2k}p_n + \overline{q}_{j-2k}q_n)\mu_l(2^{m+1}t - 2k - n)。$$

令 $2k+n=s$，则 $n=s-2k$，$j-2k = j+(n-s) = n-(s-j)$。

再令 $s-j=m$，则 $j-2k=n-m$。

这样，上式 $= \frac{1}{4}\sum_{k\in Z}\left[\sum_{s\in Z}(\overline{p}_{j-2k}p_{s-2k} + \overline{q}_{j-2k}q_{s-2k})\mu_l(2^{m+1}t - s)\right]$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}(\overline{p}_{n-m}p_n + \overline{q}_{n-m}q_n)\mu_l(2^{m+1}t - j - m)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}(\overline{p}_{n-m}p_n + (-1)^{n-m}p_{1-(n-m)}(-1)^n\overline{p}_{1-n})$$

$$\mu_l(2^{m+1}t - j - m)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}(\overline{p}_{n-m}p_n + (-1)^m p_{1-n}p_{1-n+m})\mu_l(2^{m+1}t - j - m)。$$

令 $1 - n + m = k$，则 $1 - n = k - m$，

$$\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}(-1)^m\overline{p}_{1-n}p_{1-n+m}$$

$$= \sum_{m\in Z}\sum_{k\in Z}(-1)^m\overline{p}_{k-m}p_k。$$

代入前式，最后得到

$$\frac{1}{4}\sum_{k\in Z}[\overline{p}_{j-2k}\mu_{2l}(2^m t - k) + \overline{q}_{j-2k}\mu_{2l+1}(2^m t - k)]$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{m\in Z}\sum_{n\in Z}[\overline{p}_{n-m}p_n + (-1)^m\overline{p}_{n-m}p_n]\mu_l(2^{m+1}t - j - m)$$

$$= \delta_{om}\mu_l(2^{m+1}t - j - m)$$

$$= \mu_l(2^{m+1}t - j)。$$

这就证明了 $U_{m+1}^{(l)} \subset U_m^{(2l)} \cup U_m^{(2l+1)}$。

这个定理就是把 $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$，再推广到对 W_m 的再分解，$U_{m+1}^{(l)} = U_m^{(2l)} \oplus U_m^{(2l+1)}$，并由此可得到下列递推分解式。

$$W_m = U_m^{(1)} = U_{m-1}^{(2)} \oplus U_{m-1}^{(3)}$$

$$= (U_{m-2}^{(4)} \oplus U_{m-2}^{(5)}) \oplus (U_{m-2}^{(6)} \oplus U_{m-2}^{(7)})$$

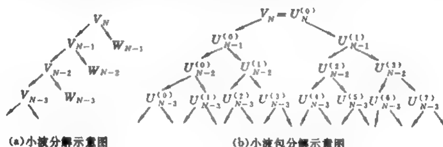
$$= \cdots$$

$$= U_{m-k}^{(2^k)} \oplus U_{m-k}^{(2^k+1)} \oplus U_{m-k}^{(2^k+2)} \oplus \cdots \oplus U_{m-k}^{(2^{k+1}-1)}。$$

实现了对 W_m 的正交分解，把 W_m 再分解为 2^k 个相互正交的子空间，至于需要分解到哪一级（即 k 的取值），可由实际问题对频域分辨率的需要而确定。

由于$U_{m-k}^{(l)}$是小波空间W_m的正交分解得到的子空间，故$U_{m-k}^{(l)}$具有小波空间的特征。由于小波包中的函数$\mu_l(t)$都具有平移正交性，所以$\{2^{\frac{m-k}{2}}\mu_{2^k+j}(2^{m-k}t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$就是$U_{m-k}^{(2^k+j)}$的标准正交基。这里对任意的$m=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,m;\ j=0,1,2,\cdots,2^k-1$，都成立。由于$U_{m-k}^{(l)}$是$W_m$的正交分解，所以$\{2^{\frac{m-k}{2}}\mu_{2^k+j}(2^{m-k}t-n),\ n\in\mathbf{Z},\ j=0,1,2,\cdots,2^k-1\}$就是$W_m$的标准正交基。而$W_m$又是$L^2$的正交分解，故$\{2^{\frac{m-k}{2}}\mu_{2^k+j}(2^{m-k}t-n),\ n\in\mathbf{Z},\ j=0,1,2,\cdots,2^k-1,\ m\in\mathbf{Z}\}$就是$L^2$的标准正交基。

与正交小波基$\{2^{\frac{m}{2}}\mu_1(2^mt-n),\ n,m\in\mathbf{Z}\}$相比，小波包对$L^2$的分解又多了一层，它可以分辨频域上更“细小”的“细节”。对充分大的N，多分辨分析的子空间V_N是L^2空间的一个近似。对V_N的小波分解和小波包分解的不同可见图4-1的示意图。



(a)小波分解示意图　　(b)小波包分解示意图

图4-1

$$W_{m-1}=U_m^{(1)}=U_{m-1}^{(2)}\oplus U_{m-1}^{(3)},$$

$$U_{m-1}^{(2)}=\overline{\operatorname{span}\{\mu_2(2^{m-1}t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}},$$

$$U_{m-1}^{(3)}=\overline{\operatorname{span}\{\mu_3(2^{m-1}t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}},$$

记$H(\omega)=P_0(e^{-i\omega}),\ G(\omega)=P_1(e^{-i\omega})$，

$$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_ne^{-i\frac{1}{2}n\omega}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=P_0(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\hat{\psi}(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}}q_ne^{-i\frac{1}{2}n\omega}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=P_1(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)=G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

由于 $\mu_{2l}(t) = \sum_{n\in Z} p_n \mu_l(2t-n)$，

$$\mu_{2l+1}(t) = \sum_{n\in Z} q_n \mu_l(2t-n),$$

$$\hat{\mu}_{2l}(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n\in Z} p_n e^{-i\frac{n}{2}\omega} \hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\hat{\mu}_{2l+1}(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n\in Z} q_n e^{-i\frac{n}{2}\omega} \hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right)。$$

$H(\omega)$和$G(\omega)$就是两个滤波器，小波包的无论哪一级分解，两个滤波器$H(\omega)$，$G(\omega)$不变，所以每一次分解实际上就是一次“滤波”过程。W_m对应的频带为$H_m=(2^{m+1}\Delta\hat{f}, 2^{m+2}\Delta\hat{f}]$，其带宽$2^m\Delta\hat{f}$，随$m$的增大而增宽，而小波包则可将$H_m$划分为$2^k$个子频带$\{H_m^{k,l}, l=0, 1, 2, \cdots, 2^k-1\}$，从而提高频谱分辨率。

对信号的多分辨分解、小波分解，它们和小波包分解的不同之处在于多分辨分解是进行低通滤波，得到原信号$\Delta\omega_0$的低频分量$\Delta\omega_L^1$，而小波分解则相当于带通滤波，得到高频分量$\Delta\omega_H^1$。然后在第二层分解时，小波分解将低频分量$\Delta\omega_L^1$再分解为低频分量$\Delta\omega_L^2$和高频分量$\Delta\omega_H^2$，而高频分量$\Delta\omega_H^1$则不再分解，而小波包分解则将高频分量$\Delta\omega_H^1$再继续分解。

在上一章讲到小波的分解与重建算法，得到系数之间的关系。设$f_j(t)\in V_j$是$f(t)$的一个多分辨逼近，$f_j(t)$在V_j的系数表示为$\{c_k^{(j)}\}$，再分解到下一级的V_{j-1}和W_{j-1}时的系数为$\{c_k^{(j-1)}\}$和$\{d_k^{(j-1)}\}$，有关系式$\begin{cases} c_k^{(j-1)} = \sum_{l\in Z} a_{l-2k} c_l^{(j)} \\ d_k^{(j-1)} = \sum_{l\in Z} b_{l-2k} c_l^{(j)} \end{cases}$，现在若作小波包分解也有类似的关系。$f(t)$在$U_m^{(l)}$中的系数表示为$\{c_{m,k}^{(l)}\}$，再分解到$U_{m-1}^{(2l)}$和$U_{m-1}^{(2l+1)}$中的系数表示为$\{c_{m-1,k}^{(2l)}\}$和$\{c_{m-1,k}^{(2l+1)}\}$时，有系数分解关系式

$$\begin{cases} c_{m-1,k}^{(2l)} = \sum_{l\in Z} a_{l-2k} c_{m,k}^{(l)} \\ c_{m-1,k}^{(2l+1)} = \sum_{l\in Z} b_{l-2k} c_{m,k}^{(l)} \end{cases}。$$

对于信号 $f(t)$ 的每一个小波分量 $f_m(t) \in W_m$，$f_m(t)$ 有级数展开式，$f_m(t) = \sum_{n\in Z} d_n^{(m)} \psi(2^m t - n)$，我们可以进一步把这个小波分量再分解为 2^k 个小波包分量，$f_{(m,k,l)}(t) = \sum_{j\in Z} d_j^{(m,k,l)} \mu_{2^k+l}(2^{m-k}t - j)$，对每一个 l，$(0 \leqslant l \leqslant 2^k - 1)$ 就是 $f_m(t)$ 的一个小波包分量，即 $f_m(t)$ 在子空间 $U_{m-k}^{(2^k+l)}$ 上的“投影”。

§4.3 小波包的构造

由

$$\mu_{2l}(t) = \sum_{n\in Z} p_n \mu_l(2t - n),$$

$$\mu_{2l+1}(t) = \sum_{n\in Z} q_n \mu_l(2t - n),$$

和

$$\hat{\mu}_{2l}(\omega) = H\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\hat{\mu}_{2l-1}(\omega) = G\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

可知构造小波包的方法有两大类，一类是通过尺度函数 $\mu_0(t)$ 和两尺度方程 $\mu_0(t) = \sum_{n\in Z} p_n \mu_0(2t-n)$，$\mu_1(t) = \sum_{n\in Z} q_n \mu_0(2t-n)$ 求出两尺度序列 $\{p_n\}$，$\{q_n\}$ 来构造。用这种方法构造小波包时，希望 $\{p_n\}$ 只有有限项非零，或对 $\{p_n\}$，p_n 以较快的速度趋于零，还有就是能够写出 $\{p_n\}$ 的一般项的表达式。

另一类构造小波包的方法是通过傅里叶变换求，这就是把滤波器 $H\left(\frac{\omega}{2}\right)$，$G\left(\frac{\omega}{2}\right)$ 作用在 $\hat{\mu}_l\left(\frac{\omega}{2}\right)$ 上，此类方法的关键就是尺度函数的傅里叶变换 $\hat{\varphi}(\omega)$ 要构造得好，因为两个滤波器都取决于 $\hat{\varphi}(\omega)$，$H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \dfrac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$，$G\left(\frac{\omega}{2}\right) = -e^{-i\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}$，还有就是这种方法最后要作傅里叶逆变换，这常常是很困难的，通常只能得到数值解。

下面分别就这两种方法进行讨论。

例 4.1 最简单的情况，取 $\varphi_1(t)$ 为一次 B 样条函数

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} t & 0\leqslant t<1, \\ 2-t & 1\leqslant t<2, \\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

其傅里叶变换为 $\hat{\varphi}_1(\omega)=e^{-i\omega}\left(\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$，

正交化 $$\hat{\varphi}(\omega)=\frac{\hat{\varphi}_1(\omega)}{\left\{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}_1(\omega+2k\pi)|^2\right\}^{1/2}}=\frac{\left(\dfrac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2}{\left(1-\dfrac{2}{3}\sin^2\dfrac{\omega}{2}\right)^{1/2}}=\hat{\mu}_0(\omega)。$$

由此求得 $H\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=\dfrac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}\left(\dfrac{\omega}{2}\right)}$，$G\left(\dfrac{\omega}{2}\right)=e^{-i\frac{\omega}{2}}\overline{H\left(\dfrac{\omega}{2}+\pi\right)}$，就可以构造出小波包的傅里叶变换$\{\hat{\mu}_l(\omega), l$ 为非负整数$\}$。

这个小波包构造简单，但性质不够好，特别是光滑性太差。

例 4.2 取 C_0^∞ 中的函数 $J_\beta(x)=\begin{cases} e^{\frac{\beta^2}{x^2-\beta^2}} & |x|<\beta, \\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$

这里 $\beta=\dfrac{\pi}{h}-b>0$，现取 $b=0.9\pi$，$h=1$，$\beta=0.1\pi$。

令 $\varphi_1(t)=\hat{J}_\beta(t)\dfrac{\sin\frac{\pi}{h}t}{\frac{\pi}{h}t}$，则 $\varphi_1(t)$ 是多分辨分析的尺度函数，$V_0=\overline{\text{span}\{\varphi_1(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}}$。要说明这个 $\varphi_1(t)$ 是尺度函数，只需证明$\{\varphi_1(t-n),\ n\in\mathbf{Z}\}$是 V_0 的 Riesz 基即可。而要证明这一点只需证明，对任意给定的 ω，存在常数 A，B，使 $0<A\leqslant\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}_1(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<\infty$，即可。

记 $$X_{[-b-\beta,\,b+\beta]}(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in[-b-\beta,\ b+\beta], \\ 0 & \text{其他。}\end{cases}$$

则 $X_{[-b-\beta,b+\beta]}(\omega)$ 正是 $\dfrac{\sin\frac{\pi}{h}t}{\frac{\pi}{h}t}$ 的傅里叶变换。

$$\varphi_1(t) = \hat{J}_\beta(t)\frac{\sin\frac{\pi}{h}t}{\frac{\pi}{h}t},$$

$$\hat{\varphi}_1(\omega) = (J_\beta * X_{[-b-\beta,b+\beta]})(\omega),$$

$$\begin{aligned}\mathrm{supp}\hat{\varphi}_1(\omega) &= (\mathrm{supp}J_\beta) \cup (\mathrm{supp}X_{[-b-\beta,b+\beta]}) \\ &= [-b-2\beta, b+2\beta] \\ &= [-1.1\pi, 1.1\pi]。\end{aligned}$$

对任意给定的 ω，级数 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}_1(\omega+2k\pi)|^2$ 中仅有两项非零项。又因为 $|J_\beta * X_{[-b-\beta,b+\beta]}| \leqslant 1$，所以必存在常数 A，B 使 $0 < A \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2 \leqslant B < \infty$，因此可知 $\{\varphi_1(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 是 V_0 的 Riesz 基。

对 $\varphi_1(t)$ 作正交化 $\hat{\varphi}(\omega) = \dfrac{\hat{\varphi}_1(\omega)}{\left\{\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}_1(\omega+2k\pi)|^2\right\}^{1/2}}$，则 $\hat{\varphi}(\omega) \in C_0^\infty$，得到的 $H\left(\frac{\omega}{2}\right) = \dfrac{\hat{\varphi}(\omega)}{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}$ 既是任意次可导，又有紧支集，具有很好的性质。

下面再来讨论直接利用双尺度序列 $\{p_n\}$ 来构造小波包的问题。

定义 4.2 设 $f(t) \in L^2$，若对于任意给定的 $\alpha > 0$，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega)|(1+|\omega|)^{1+\alpha}\mathrm{d}\omega < \infty$，则称 $f(t)$ 属于 C^α 类。

在第三章的定理 3.12 中，给出了频谱有限尺度函数的充分必要条件，根据这个定理，我们给出构造双尺度序列 $\{p_n\}$ 的一般方法，且对应的尺度函数 $\varphi(t)$ 有很好的性质。

定理 4.5 设函数 $\hat{\varphi}(\omega)$ 满足定理 3.12 中的（Ⅰ）～（Ⅳ）四个条

件，$-a=b$，$\hat{\varphi}(\omega)\in C^N$，则有：

(1) $\hat{\varphi}(\omega)$的傅里叶逆变换 $\varphi(t)$是正交多分辨分析的尺度函数，满足 $\varphi(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_n\varphi(2t-n)$。

(2) $\varphi(t)\in C^\alpha$，α 为任意正实数，且当 $t\to\infty$ 时，$\varphi(t)=O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$。

(3) $H(\omega)=\hat{\varphi}(2\omega)$，$\omega\in\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$。

(4) 双尺度序列$\{p_n\}$的通项为 $p_n=\varphi\left(\frac{n}{2}\right)$，且当 $n\to\infty$ 时，p_n 与 $\frac{1}{n^{N+1}}$ 同阶。

证明 (1) 由定理 3.12 可知，$\hat{\varphi}(\omega)$满足 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2\equiv 1$ 这些条件是 $\varphi(t)$构成正交尺度函数的充要条件，当然满足双尺度方程。

(2) 由于 $\hat{\varphi}(\omega)$有紧支集，且 N 阶导数连续，无间断点，所以，对任意的 $\alpha>0$ 有$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{\varphi}(\omega)|(1+|\omega|)^{1+\alpha}\mathrm{d}\omega<\infty$。同时根据傅里叶变换的知识可知，$\hat{\varphi}(\omega)\in C^N$，则当 $t\to\infty$ 时，$\varphi(t)$ 与$\frac{1}{t^{N+1}}$ 同阶。

(3) 因为 $\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega)$，由于 $\operatorname{supp}\hat{\varphi}(\omega)=[a,b]$，当然有 $\operatorname{supp}\hat{\varphi}(2\omega)=\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$，由定理 3.12 的条件(Ⅲ)，当 $\omega\in[a+c,b-c]$ 时，$|\hat{\varphi}(\omega)|\equiv 1$。再由定理 3.12 条件(Ⅰ)$b-2\pi\leqslant\frac{a}{2}$，所以 $a+c\leqslant\frac{a}{2}$；又由$\frac{b}{2}\leqslant a+2\pi$，所以$\frac{b}{2}\leqslant b-c$。即$\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]\subseteq[a+c,b-c]$，所以在 $\omega\in\left[\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right]$时 $|\hat{\varphi}(\omega)|\equiv 1$ 同样成立。

(4) 因为$\{\sqrt{2}\varphi(2t-n),n\in\mathbf{Z}\}$是 V_1 的标准正交基，由两尺度方程 $\varphi(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}p_n\varphi(2t-n)$，所以系数 p_n 应有

$$
\begin{aligned}
p_n &= \sqrt{2}(\varphi(t), \sqrt{2}\varphi(2t-n)) \\
&= 2\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\,\overline{\varphi(2t-n)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)\cdot\frac{1}{2}e^{i\frac{n}{2}\omega}\,\overline{\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{a}^{b} \hat{\varphi}(\omega)e^{i\frac{n}{2}\omega}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)e^{i\frac{n}{2}\omega}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \varphi\left(\frac{n}{2}\right).
\end{aligned}
$$

且由于当 $t\to\infty$ 时，$\varphi(t)$ 与 $\frac{1}{t^{N+1}}$ 同阶，所以当 $n\to\infty$ 时，$p_n=\varphi\left(\frac{n}{2}\right)$ 与 $\frac{1}{n^{N+1}}$ 同阶。

按照这个定理，我们可以直接构造双尺度序列 $\{p_n\}$，继而构造出小波包。

进一步我们还可以通过前面提到过的 $J_\beta(t)$ 函数，来构造 S-空间中的尺度函数 $\varphi(t)$，和两尺度序列 $\{p_n\}$，使对任意正整数 N，$\lim\limits_{n\to\infty} p_n\cdot n^N=0$，即 p_n 以极快的速度趋于零。

第五章　半离散小波和非正交小波

§5.1　半离散小波

设 $\psi(t)$ 是一个小波母函数，$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$，$a\neq 0$。当 a, b 都取实数时，就是连续小波，对 a, b 作离散化，就得到离散小波。特别是，在取 $a=2^{-m}$, $b=\frac{n}{2^m}$ 的情况下，就是最常用的离散小波。

参数 a 既决定了小波的频谱结构，又决定了时、频窗口的宽度。

设 $\hat{\psi}(\omega)$ 是一个窗口函数，$\Delta_{\hat{\psi}}$ 是窗口半径，现将 $\hat{\psi}(\omega)$ 的窗口中心取为 $t_{\hat{\psi}}^{*}=3\Delta_{\hat{\psi}}$，则当 a 取 2^{-m} 时，$\hat{\psi}_{2^{-m},b}(\omega)$ 的窗口为 $[t_{\hat{\psi}}^{*}\cdot 2^m-2^m\Delta_{\hat{\psi}},\ t_{\hat{\psi}}^{*}\cdot 2^m+2^m\Delta_{\hat{\psi}}]$，即 $[2^{m+1}\Delta_{\hat{\psi}},\ 2^{m+2}\Delta_{\hat{\psi}}]$，当 m 取遍所有整数时，$\hat{\psi}_{2^{-m},b}(\omega)$ 的窗口恰好填满正实轴 $(0,\ +\infty)$，所以对 a 作离散化 $a=2^{-m}$ 处理，实际上是把正频率轴作了一个二进划分。

参数 b 的作用是确定位置。所谓半离散小波就是对参数 a 离散化，而 b 不作离散处理。特别是，我们对 a 的二进离散 $a=2^{-m}$ 感兴趣，因为这种对正频轴的二进划分在实际问题中比较有用。

下面我们讨论这种半离散小波有些什么特性。

对于连续小波，如果已知信号 $f(t)$ 的连续小波变换 $(W_{\psi}f)(a,b)$ 就可以通过逆变换求出 $f(t)$。

$f(t)=\frac{1}{c_{\psi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(W_{\psi}f)(a,b)\,\overline{\psi_{a,b}(t)}\,\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$，即在对 $f(t)$ 作小波变换中保留了 $f(t)$ 的全部信息。

对于离散小波变换 $(W_\psi f)\left(2^{-m}, \frac{n}{2^m}\right)$，$\{(W_\psi f)\left(2^{-m}, \frac{n}{2^m}\right), m, n \in \mathbf{Z}\}$ 所包含的信息，当然要比 $\{(W_\psi f)(a, b), a \neq 0, a, b \in \mathbf{R}\}$ 所包含的信息少了很多。但如果加上了$\{\psi_{m,n}(t), m, n \in \mathbf{Z}\}$是正交小波基的条件，那么，当已知 $f(t)$的离散小波变换时，仍然能够重建原信号，$f(t) = \sum\limits_{m,n \in \mathbf{Z}} c_{m,n}\psi_{m,n}(t)$，这里 $c_{m,n}$恰好就是$f(t)$的离散小波变换 $c_{m,n} = c_f(m, n) = (W_\psi f)\left(2^{-m}, \frac{n}{2^m}\right)$。所以，要从离散小波变换 $\{(W_\psi f)\left(2^{-m}, \frac{n}{2^m}\right), m, n \in \mathbf{Z}\}$ 来重建信号 $f(t)$时，“正交性”这一条件是不可缺少的。

现在对于半离散的小波变换 $\{(W_\psi f)(2^{-m}, b), m \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{R}\}$ 所包含的信息，比连续小波变换 $\{(W_\psi f)(a, b), a \neq 0, a, b \in \mathbf{R}\}$ 少了很多信息，而相对于正交小波来说，又缺少了正交性这一条件。那么，如果已知 $\{(W_\psi f)(2^{-m}, b), m \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{R}\}$，能否重建信号 $f(t)$呢。当然，对于缺少信息的情况要重建 $f(t)$，就得加上一定的条件来弥补。

定义 5.1 对于函数 $\psi(t)$，如果存在常数 A, B，使得对于任意的 $\omega \in \mathbf{R}$, $0 < A \leqslant \sum\limits_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2 \leqslant B < \infty$，几乎处处成立，则称 $\psi(t)$ 满足稳定性条件。

定义 5.2 设函数 $\psi(t) \in L^2$，如果 $\psi(t)$ 满足稳定性条件，则称 $\psi(t)$ 是一个二进小波。

函数序列 $\{(W_\psi f)(2^{-m}, b), m \in \mathbf{Z}\}$ 称为 $f(t)$的二进小波变换。其中

$$
\begin{aligned}
(W_\psi f)(2^{-m}, b) &= (f, \psi_{2^{-m}, b}) \\
&= 2^{\frac{m}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \overline{\psi(2^m t - 2^m b)}\, \mathrm{d}t。
\end{aligned}
$$

二进小波变换是一种半离散的小波变换。

一个 L^2 中的函数 $\psi(t)$，只要满足稳定性条件，就可以称之为小

波，而不再需要判别小波的允许性条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega<\infty$。

下面的定理说明了稳定性条件和允许性条件的关系。

定理 5.1 设 $\psi(t)$ 是一个二进小波，则必有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega<\infty,$$

且 $$A\ln 2\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega,\ \int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega\leqslant B\ln 2。$$

证明 令 $\omega=2^m x$，则

$$\int_1^2\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{\omega}d\omega=\int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}}\frac{|\hat{\psi}(x)|^2}{2^m x}\cdot 2^m dx$$
$$=\int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega。$$

现对稳定性条件 $A\leqslant\sum_{m\in Z}|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2\leqslant B$，两边同乘以 $\frac{1}{\omega}$，并在区间(1, 2)上积分，得

$$A\ln 2\leqslant\sum_{m\in Z}\int_1^2\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{\omega}d\omega\leqslant B\ln 2。$$

因为 $$\sum_{m\in Z}\int_1^2\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{\omega}d\omega=\sum_{m\in Z}\int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega,$$

所以 $A\ln 2\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega\leqslant B\ln 2$。

对稳定性条件，再乘以 $-\frac{1}{\omega}$，并在(−2, −1)区间上积分

$$\int_{-2}^{-1}\frac{|\hat{\psi}(2^{-m}\omega)|^2}{\omega}d\omega$$

$$=\int_{2}^{1}-\frac{|\hat{\psi}(-2^{-m}x)|^2}{x}dx$$

$$=\int_{1}^{2}\frac{|\hat{\psi}(-2^{-m}\omega)|^2}{\omega}d\omega$$

$$=\int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega。$$

所以 $A\ln 2\leqslant\sum_{m\in\mathbf{Z}}\int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega=\int_{0}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega\leqslant B\ln 2$。

又因为 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega=\int_{-\infty}^{0}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{-\omega}d\omega+\int_{0}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega$，

且由于 $\int_{-\infty}^{0}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{-\omega}d\omega=\int_{+\infty}^{0}\frac{|\hat{\psi}(-x)|^2}{x}d(-x)$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega,$$

因此有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}d\omega=\int_{0}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(-\omega)|^2}{\omega}d\omega+\int_{0}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega}d\omega$

$$\leqslant 2B\ln 2。$$

所以二进小波一定是小波，它具有小波的所有特性。

前面讲过，二进小波变换$\{(W_\psi f)(2^{-m},b),\ m\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{R}\}$与连续小波变换$\{(W_\psi f)(a,b),\ a\neq 0,\ a,\ b\in\mathbf{R}\}$相比要缺少一部分变换信息，这就通过稳定性条件加以弥补，因此，由二进小波变换的信息$\{(W_\psi f)(2^{-m},b),\ m\in\mathbf{Z},\ b\in\mathbf{R}\}$仍可反演出 $f(t)$。

$\psi_{2^{-m},b}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-2^m b)$，$f(t)$的二进小波变换可以用卷积来表示：

$$(W_\psi f)(2^{-m},b)=(f,\psi_{2^{-m},b})$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)2^{\frac{m}{2}}\overline{\psi(2^m t-2^m b)}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) 2^{\frac{m}{2}} \overline{\psi[-2^m(b-t)]} \mathrm{d}t$$

$$= 2^{\frac{m}{2}} (f * \overline{\psi(-2^m \cdot)})(b)。$$

这里用"·"表示变量 t, $f*\psi(-2^m\cdot)$ 表示 $f(t)$ 与 $\psi(-2^m t)$ 的卷积，卷积的结果是 b 的函数。下面还用到记号 $\hat{\psi}[-2^m(\cdot-t)]$ 表示 $\psi[-2^m(x-t)]$ 对变量 x 的傅里叶变换，即 $\hat{\psi}[-2^m(\cdot-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\psi}[-2^m(x-t)]\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x$，有时也记作 $\hat{\psi}[-2^m(\cdot-t)](\omega)$，强调它是 ω 的函数。

定理 5.2 $\psi(t)$ 是一个二进小波，$f(t) \in L^2$，$(W_\psi f)(2^{-j}, b)$ 是 $f(t)$ 的二进小波变换，则有反演公式

$$f(t) = \sum_{j\in Z} \int_{-\infty}^{+\infty} \{2^{\frac{j}{2}}(W_\psi f)(2^{-j}, b)\}\{2^j \psi^*(2^j t - 2^j b)\}\mathrm{d}b,$$

这里 $\hat{\psi}^*(\omega) = \dfrac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in Z} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}$，$\psi^*(t)$ 是 $\hat{\psi}^*(\omega)$ 的傅里叶逆变换。

证明 记 $(W_j f)(b) = 2^{\frac{j}{2}}(W_\psi f)(2^{-j}, b)$

$$= 2^{\frac{j}{2}} \cdot 2^{\frac{j}{2}}(f * \overline{\psi(-2^j \cdot)})(b),$$

由 Parseval 等式

$$((W_j f)(b), 2^j \psi^*[2^j(t-b)])$$

$$= \frac{1}{2\pi}((W_j f)(\omega), 2^j \hat{\psi}^*[-2^j(\cdot - t)](\omega))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \{(\hat{W_j f})(\omega)\}\{2^j \hat{\psi}^*[-2^j(\cdot - t)](\omega)\}\mathrm{d}\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \{2^j[f * \overline{\psi(-2^j \cdot)}]^\wedge(\omega)\}\{2^j \hat{\psi}^*[-2^j(\cdot - t)](\omega)\}\mathrm{d}\omega。$$

注意，这里 $\hat{\psi}^*[-2^j(\cdot-t)](\omega)$ 是 $\psi^*[-2^j(b-t)]$ 对变量 b 作傅里叶变换，而不是对 t 作傅里叶变换。

根据傅里叶变换的性质 $(f*g)(\omega)=\hat{f}(\omega)\cdot\hat{g}(\omega)$，可得

$$(f*\overline{\psi(-2^j\cdot)})=\hat{f}(\omega)\cdot\overline{\psi(-2^j\cdot)}(\omega).$$

$$\overline{\hat{\psi}(-2^j\cdot)}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(-2^jb)}e^{-i\omega b}db$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(2^jx)}e^{i\omega x}dx$$

$$=\frac{1}{2^j}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(2^jx)}e^{i\frac{\omega}{2^j}2^jx}d(2^jx)$$

$$=\frac{1}{2^j}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(y)}e^{i\frac{\omega}{2^j}y}dy$$

$$=\frac{1}{2^j}\int_{-\infty}^{+\infty}\overline{\psi(y)e^{-i\frac{\omega}{2^j}y}}dy$$

$$=\frac{1}{2^j}\overline{\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^j}\right)}.$$

$$\hat{\psi}^*[-2^j(\cdot-t)](\omega)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*[-2^j(b-t)]e^{-i\omega b}db$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(-2^jx)e^{-i\omega(x+t)}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(-2^jx)e^{i\omega\left(\frac{-1}{2^j}\right)(-2^jx)}\cdot e^{-i\omega t}\left(-\frac{1}{2^j}\right)d(-2^jx)$$

$$=\frac{-1}{2^j}\int_{+\infty}^{-\infty}\psi^*(y)e^{i\frac{\omega}{2^j}y}e^{-i\omega t}dy$$

$$=\frac{1}{2^j}e^{-i\omega t}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*(y)e^{-i\frac{-\omega}{2^j}y}dy$$

$$=\frac{1}{2^j}e^{-i\omega t}\hat{\psi}^*\left(\frac{-\omega}{2^j}\right)$$

$$=\frac{1}{2^j}e^{i\omega t}\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega).$$

所以

$$\sum_{j\in Z}\int_{-\infty}^{+\infty}\{(W_j f)(b)\}\{2^j\psi^*[2^j(t-b)]\}\mathrm{d}b$$

$$=\sum_{j\in Z}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\hat{f}(\omega),\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}\}\{\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)e^{i\omega t}\}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\sum_{j\in Z}\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}\frac{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}{\sum_{k\in Z}|\hat{\psi}[2^{-k}(2^{-j}\omega)]|^2}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\sum_{j\in Z}\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}\frac{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}{\sum_{n\in Z}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=f(t)。$$

这个反演公式出现了一个与 $\psi(t)$有关的 $\psi^*(t)$，那么这样的$\psi^*(t)$有什么特点呢？

定理 5.3 设 $\psi(t)$是一个二进小波，则由 $\hat{\psi}^*(\omega)=\dfrac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in Z}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}$ 所定义的 $\psi^*(t)$也是二进小波。

证明

$$\sum_{j\in Z}|\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)|^2=\sum_{j\in Z}\left|\frac{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}{\sum_{k\in Z}|\hat{\psi}(2^{-k-j}\omega)|^2}\right|^2$$

$$=\sum_{j\in Z}\left|\frac{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}{\sum_{n\in Z}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2}\right|^2$$

$$=\frac{1}{\sum_{n\in Z}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2}\frac{\sum_{j\in Z}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2}{\sum_{n\in Z}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2}$$

$$= \frac{1}{\sum_{n\in Z} |\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2}。$$

由于 $\psi(t)$ 是一个二进小波，所以

$0 < A \leqslant \sum_{n\in Z} |\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2 \leqslant B < \infty$，因此，

$0 < \frac{1}{B} \leqslant \frac{1}{\sum_{n\in Z} |\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2} = \sum_{j\in Z} |\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)|^2 \leqslant \frac{1}{A} < \infty$，即

$\psi^*(t)$ 也是一个二进小波。

正交小波的制约条件很多，构造困难，表达式一般也比较复杂，甚至写不出表达式。二进小波比正交小波构造简单得多，稳定性条件很容易满足，而且 a 的离散化 $a = 2^{-m}$，实现了对正频轴的二进划分，又比较符合工程上的需要。因此二进小波作为介于连续小波和离散小波之间的一种半离散小波，也是一种常用的小波。

§5.2 一种二进小波的构造

前一节已经提到，由于二进小波的稳定性条件容易满足，故二进小波的构造不像正交小波那样困难。但考虑到实际应用，当然希望构造的二进小波要表达式简单，性质良好，这里性质良好，与正交小波一样，主要是指时域、频域的局部性要好，光滑性要好，还希望有对称性。下面通过 B 样条来构造一种二进小波。

对于 $m-1$ 次 B 样条 $N_m(t)$ 具有下列性质：

(1) $N_m(t) = (N_{m-1} * N_1)(t)$，故 $\hat{N}_m(\omega) = [\hat{N}_1(\omega)]^m$。

(2) $N_m(t)$ 具有 $m-2$ 阶连续导数。

(3) $0 \leqslant N_m(t) \leqslant 1$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} N_m(t)\mathrm{d}t = 1$。

(4) $\mathrm{supp}N_m(t) = [0, m]$，且 $N_m(t)$ 在 $\left[0, \frac{m}{2}\right]$ 上单调上升，在 $t = \frac{m}{2}$ 时，达到最大，在 $\left[\frac{m}{2}, m\right]$ 上，单调下降。

(5) $N_m(t)$关于 $t=\frac{m}{2}$ 轴对称。

令 $\hat{\varphi}(\omega)=N_m(\omega-m)+N_m(\omega-1.5m)$。

由于 $\mathrm{supp}\{N_m(\omega-m)\}=[m,2m]$；

$\mathrm{supp}\{N_m(\omega-1.5m)\}=[1.5m,2.5m]$。

所以 $\mathrm{supp}\hat{\varphi}(\omega)=[m,2.5m]$。

现证明对于任意正整数 m，存在常数 A，B 使

$$0<A\leqslant\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2\leqslant B<\infty.$$

对任意取定的 ω，考虑级数 $\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2$ 的非零项。

由于 $\mathrm{supp}\hat{\varphi}(\omega)=[m,2.5m]$，所以当且仅当 $2^jm\leqslant\omega\leqslant2^{j+1}m$ 时，$\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)\neq0$，因此级数有且仅有两项非零项。

又因为 $|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|\leqslant|N_m(2^{-j}\omega-m)|+|N_m(2^{-j}\omega-1.5m)|\leqslant2$，所以，$\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2\leqslant8=B$。

再证明存在常数 $A>0$，使 $\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2\geqslant A$。

由于 $N_m(\omega-m)$的非零区间为$[m,2m]$，$N_m(\omega-1.5m)$的非零区间为$[1.5m,2.5m]$。

所以在$[m,1.5m]$上，$\hat{\varphi}(\omega)=N_m(\omega-m)$，且 $\hat{\varphi}(\omega)$ 单调上升，在$[2m,2.5m]$上，$\hat{\varphi}(\omega)=N_m(\omega-1.5m)$，且单调下降。如图 5－1 所示。

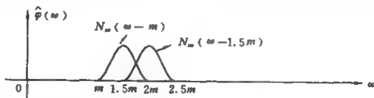


图 5－1

对于任意给定的 ω，必存在一个 j_0，使 $2^{j_0}\omega\in[m,2.5m]$，现将 $\hat{\varphi}(\omega)$的非零区间分为三段：

$[m,1.1m]\cup(1.1m,2.4m)\cup[2.4m,2.5m]$，就 $2^{j_0}\omega\in[m,2.5m]$

分三种情况考虑。

情况一：$2^{j_0}\omega\in[m,1.1m]$，则 $2^{j_0+1}\omega\in[2m,2.2m]$，而 $\hat{\psi}(\omega)$在$[2m,2.5m]$上单调下降。

所以有

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2\geqslant|\hat{\varphi}(2^{j_0+1}\omega)|^2\\&=|N_m(2^{j_0+1}\omega-m)+N_m(2^{j_0+1}\omega-1.5m)|^2\\&\geqslant|N_m(2^{j_0+1}\omega-1.5m)|^2\\&\geqslant|N_m(2.2m-1.5m)|^2\\&=|N_m(0.7m)|^2\\&>|N_m(0.1m)|^2。\end{aligned}$$

情况二：$2^{j_0}\omega\in(1.1m,2.4m)$

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2\geqslant|\hat{\varphi}(2^{j_0}\omega)|^2\\&=|N_m(2^{j_0}\omega-m)+N_m(2^{j_0}\omega-1.5m)|^2\\&\geqslant|N_m(0.1m)|^2。\end{aligned}$$

情况三：$2^{j_0}\omega\in[2.4m,2.5m]$，则 $2^{j_0-1}\omega\in[1.2m,1.25m]$，而 $\hat{\varphi}(\omega)$在$[1.2m,1.25m]$上单调上升。所以有

$$\begin{aligned}&\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2\geqslant|\hat{\varphi}(2^{j_0-1}\omega)|^2\geqslant|\hat{\varphi}(1.2m)|^2\\&=|N_m(0.2m)|^2\geqslant|N_m(0.1m)|^2。\end{aligned}$$

现取 $A=|N_m(0.1m)|^2$，则以上三种情况都满足

$$0<A\leqslant\sum_{j\in Z}|\hat{\varphi}(2^{-j}\omega)|^2\leqslant B<\infty。$$

由此可知，$\hat{\varphi}(\omega)$的傅里叶逆变换 $\varphi(t)$是一个二进小波，记为 $\psi_1(t)=\varphi(t)=F^{-1}[\hat{\varphi}(\omega)]$。

记 $\check{f}(t)=f(-t)$，称 $f(t)$的一个反射。由傅里叶逆变换的性质可知，$F^{-1}[f]=\frac{1}{2\pi}F[\check{f}]$

$$
\begin{aligned}
F[\hat{\varphi}] &= F[N_m(\omega-m)+N_m(\omega-1.5m)] \\
&= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}\hat{N}_m(t)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt}\hat{N}_m(t) \\
&= (\mathrm{e}^{-\mathrm{i}mt}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m}{2}t}\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right]^m。
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\psi_1(t) &= F^{-1}[\hat{\varphi}]=\frac{1}{2\pi}F[\check{\hat{\varphi}}] \\
&= \frac{1}{2\pi}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m}{2}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}1.5mt}\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right]^m。
\end{aligned}
$$

$\psi_1(t)$是一个形式简单、性质良好的二进小波，但它是一个复值函数。根据需要，我们还可以进一步把它改造为一个实函数。

令 $\hat{\psi}(\omega)=\hat{\varphi}(\omega)+\hat{\varphi}(-\omega)=\hat{\varphi}+\check{\hat{\varphi}}$

$$
\begin{aligned}
\psi(t) &= (F^{-1}\hat{\psi})(t) \\
&= \frac{1}{2\pi}F[\check{\hat{\psi}}] \\
&= \frac{1}{2\pi}F(\check{\hat{\varphi}})+\frac{1}{2\pi}F(\check{\check{\hat{\varphi}}}) \\
&= \frac{1}{2\pi}F(\check{\hat{\varphi}})+\frac{1}{2\pi}F(\hat{\varphi}) \\
&= \frac{1}{2\pi}(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{m}{2}t})\mathrm{e}^{\mathrm{i}1.5mt}\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right]^m+\frac{1}{2\pi}(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{m}{2}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}1.5mt}\left[\frac{\sin\frac{t}{2}}{\frac{t}{2}}\right]^m \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{t}\right)^m\left(\sin\frac{t}{2}\right)^m(\cos\frac{3}{2}mt+\cos 2mt)。
\end{aligned}
$$

这是一个实的二进小波，其图像如图 5－2 所示。

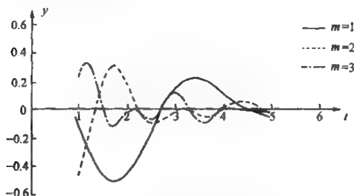


图 5－2　实的二进小波 $\psi(t)$

以上构造出来的二进小波具有如下性质：

(1) $\psi(t)$充分光滑；

(2) $\psi(t)$有很好的局部性，当 $t\to\infty$时，$\psi(t)=O\left(\frac{1}{t^m}\right)$；

(3) $\hat{\psi}(\omega)$有紧支集；

(4) $\psi(t)$具有对称性。

我们可以根据问题的需要，通过选择 m 来控制时域和频域的局部性。m 越大，时域的局部性越好，但频域上的支集长度随 m 的增大而增大，频域局部性变差。

§5.3　对偶小波

在二进小波的反演公式

$$f(t)=\sum_{m\in Z}\int_{-\infty}^{+\infty}\{2^{\frac{m}{2}}(W_\psi f)(2^{-m},\ b)\}\{2^m\psi^*(2^m t-2^m b)\}db$$ 中，

$\psi^*(t)$是一个由 $\psi(t)$确定的二进小波。$\psi^*(t)$和 $\psi(t)$有密切的关系，我们把 $\psi^*(t)$称为 $\psi(t)$的一个对偶小波，同样 $\psi(t)$也称为 $\psi^*(t)$的对偶小波，或称 $\psi(t)$和 $\psi^*(t)$是一对对偶小波。注意二进小波的对偶可能

不惟一。

我们与连续小波变换的反演公式：

$$f(t)=\frac{1}{C_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\{(W_\psi f)(a,b)\}\{\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)\}\cdot\frac{1}{a^2}\mathrm{d}a\mathrm{d}b$$ 比较一下

就可以发现，按照上面的对偶意义，连续小波的对偶恰好就是其本身，我们称之为自对偶。

由上可见，所谓小波变换的反演公式，就是函数的小波变换乘上其对偶小波的积分或求和，所以只有知道了一个小波的对偶，信号的重建（即 $f(t)$ 的反演）才能实现。而连续小波的一个重要特征，就是它是自对偶的。

定理 5.4 $\psi(t)$ 是一个二进小波，$\psi^*(t)\in L^2$，且满足 $\sum_{j\in Z}|\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)|^2<\infty$，则 $\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的二进对偶的充分必要条件是：$\sum_{m\in Z}\overline{\hat{\psi}(2^{-m}\omega)}\hat{\psi}^*(2^{-m}\omega)=1$ 对任意的 $\omega\in\mathbf{R}$，几乎处处成立。

证明 必要性：因为 $\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的对偶，所以满足

$$\hat{\psi}^*(\omega)=\frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{j\in Z}|\hat{\psi}(2^{-j}\omega)|^2},$$

$$\hat{\psi}^*(2^{-k}\omega)\overline{\hat{\psi}(2^{-k}\omega)}=\frac{\hat{\psi}(2^{-k}\omega)\overline{\hat{\psi}(2^{-k}\omega)}}{\sum_{j\in Z}|\hat{\psi}(2^{-j-k}\omega)|^2}$$

$$=\frac{|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}{\sum_{n\in Z}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2},$$

所以

$$\sum_{k\in Z}\hat{\psi}^*(2^{-k}\omega)\overline{\hat{\psi}(2^{-k}\omega)}$$

$$=\sum_{k\in Z}\frac{|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2}{\sum_{n\in Z}|\hat{\psi}(2^{-n}\omega)|^2}=1.$$

再证充分性：

$$\sum_{j\in Z}\int_{-\infty}^{+\infty}\{(W_j f)(b)\}\{2^j\psi^*(2^j t-2^j b)\}\mathrm{d}b$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in Z}\int_{-\infty}^{+\infty}\{\hat{f}(\omega)\cdot\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}\}\{\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)\cdot e^{i\omega t}\}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\{\sum_{j\in Z}\overline{\hat{\psi}(2^{-j}\omega)}\,\hat{\psi}^*(2^{-j}\omega)\}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$=f(t)。$$

由此可知，$\psi^*(t)$是$\psi(t)$的对偶小波。

上面讨论了连续小波和半离散小波的对偶，下面讨论离散小波的对偶。

定义 5.3 设$\psi(t)$是一个小波母函数，如果$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in Z\}$是$L^2$的一个 Riesz 基，则称$\psi(t)$是一个 Riesz 函数，简称 R 函数。

对于一个 R 函数$\psi(t)$，如果存在$\psi^*(t)\in L^2$，使$(\psi_{m,n},\ \psi^*_{k,l})=\delta_{mk}\cdot\delta_{nl}$对任意的整数$m,\ n,\ k,\ l$成立，则称$\psi(t)$是一个 R 小波，$\psi^*(t)$称为$\psi(t)$的对偶小波。

当然$\psi^*(t)$也是一个 R 小波。

对于正交小波，本身就成立$(\psi_{m,n},\ \psi_{k,l})=\delta_{mk}\cdot\delta_{nl}$，所以正交小波是自对偶的。

定义 5.4 设$\varphi(t)$和$\{V_m\}$是一个多分辨分析，$\varphi^*(t)$和$\{V_j^*\}$也是一个多分辨分析，如果满足：

$$(\varphi(t-m),\ \varphi^*(t-n))=\delta_{mn},$$

则称$\varphi(t)$和$\varphi^*(t)$是一对对偶尺度函数。

对于多分辨分析$\varphi(t)$，$\{V_m\}$，有双尺度方程

$$\varphi(t)=\sum_{n\in Z}P_n\varphi(2t-n),\ \hat{\varphi}(\omega)=P(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)。$$

由于 $\varphi^*(t)$ 和 $\{V_j^*\}$ 也是一个多分辨分析，当然也满足双尺度方程 $\varphi^*(t)=\sum_{n\in\mathbf{Z}} r_n\varphi^*(2t-n)$，$\hat{\varphi}^*(\omega)=\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbf{Z}} r_n e^{-i\frac{n}{2}\omega}\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)$，记 $R(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n z^n$，$z$ 为复数，则 $R(e^{-i\frac{\omega}{2}})=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} r_n e^{-i\frac{n}{2}\omega}$，$\hat{\varphi}^*(\omega)=R(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)$。$P(z)$ 和 $R(z)$ 分别是两个不同的多分辨分析的各自的双尺度符号。

定义 5.5 两个双尺度符号 $P(z)$ 和 $R(z)$，如果在 $|z|=1$ 上满足 $P(z)\overline{R(z)}+P(-z)\overline{R(-z)}=1$，则称这两个双尺度符号 $P(z)$ 和 $R(z)$ 是相互对偶的。

尺度函数的对偶和双尺度符号的对偶有如下关系。

定理 5.5 $\varphi(t)$，$\{V_m\}$ 和 $\varphi^*(t)$，$\{V_j^*\}$ 是两个多分辨分析，$P(z)$ 和 $R(z)$ 分别是对应的两个双尺度符号，如果 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是一对对偶尺度函数，则 $P(z)$ 和 $R(z)$ 也相互对偶。

证明

因为 $\varphi(t)$ 和 $\varphi^*(t)$ 是相互对偶的尺度函数，所以应有 $(\varphi(t),\varphi^*(t-n))=\delta_{0n}$。

由 Parseval 等式 $(\varphi(t),\varphi^*(t-n))$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\,\overline{\hat{\varphi}^*(\omega)}e^{in\omega}d\omega\\
&=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{2\pi}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\hat{\varphi}(\omega)\,\overline{\hat{\varphi}^*(\omega)}e^{in\omega}d\omega\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)\,\overline{\hat{\varphi}^*(\omega+2k\pi)}e^{in\omega}d\omega。
\end{aligned}
$$

要使上式等于 δ_{0n}，只能是 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)\,\overline{\hat{\varphi}^*(\omega+2k\pi)}=1$，对 $\omega\in\mathbf{R}$，几乎处处成立。

又因为 $\hat{\varphi}(\omega)=P(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$，$\hat{\varphi}^*(\omega)=R(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)$。

所以 $\delta_{0m}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\varphi}(\omega)\,\overline{\hat{\varphi}^{*}(\omega)}\,\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\,\hat{\varphi}^{*}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{4k\pi}^{4(k+1)\pi}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{im\omega}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{\hat{\varphi}^{*}\left(\frac{\omega}{2}\right)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{im\omega}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\overline{\hat{\varphi}^{*}\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)}\mathrm{d}\omega。$$

因为 $F(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)\,\overline{\hat{\varphi}^{*}(\omega+2k\pi)}=1$ 几乎处处成立，所以，$F\left(\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)\overline{\hat{\varphi}^{*}\left(\frac{\omega}{2}+2k\pi\right)}=1$ 也几乎处处成立。将它代入上式，就有

$$\delta_{0m}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{4\pi}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{2\pi}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega+\int_{2\pi}^{4\pi}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{0}^{2\pi}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega+\int_{0}^{2\pi}P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}-\pi i})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}-\pi i})}\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left[P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}+P(-\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(-\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}\right]\mathrm{e}^{im\omega}\mathrm{d}\omega。$$

因此 $P(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{R(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})}+P(-\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})R(-\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})=1$ 几乎处处成立，所以，在 $|z|=1$ 上有 $P(z)\,\overline{R(z)}+P(-z)\,\overline{R(-z)}=1$，这里 z 是一个复数，即 $P(z)$和 $R(z)$是一对对偶。

现在讨论对偶尺度函数与对偶小波的关系：

设 $$\psi(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}q_k\varphi(2t-k);$$

$$\psi^*(t)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}s_k\varphi^*(2t-k)。$$

其中 $\varphi(t)$和 $\varphi^*(t)$是一对对偶尺度函数。

记
$$Q(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}q_kz^k,$$

$$S(z)=\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbf{Z}}s_kz^k。$$

则
$$\hat{\psi}(\omega)=Q(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right),$$

$$\hat{\psi}^*(\omega)=S(\mathrm{e}^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)。$$

$$V_m=\overline{\mathrm{span}\{\varphi_{m,n}(t),n\in\mathbf{Z}\}},\ V_m^*=\overline{\mathrm{span}\{\varphi_{m,n}^*(t),n\in\mathbf{Z}\}};$$

$$W_m=\overline{\mathrm{span}\{\psi_{m,n}(t),n\in\mathbf{Z}\}},\ W_m^*=\overline{\mathrm{span}\{\psi_{m,n}^*(t),n\in\mathbf{Z}\}};$$

$$V_{m+1}=V_m\oplus W_m,\ V_{m+1}^*=V_m^*\oplus W_m^*。$$

定理 5.6 如果尺度函数 $\varphi(t)$和 $\varphi^*(t)$相互对偶,则 $\psi(t)$和 $\psi^*(t)$是相互对偶的小波,即 $(\psi_{m,n},\psi_{k,l}^*)=\delta_{mk}\cdot\delta_{nl}$。且具有正交性:

$$(\varphi_{m,n},\psi_{m,j}^*)=0,$$
$$(\varphi_{m,n}^*,\psi_{m,j})=0,$$

对任意的 $m,n,j\in\mathbf{Z}$ 成立。这个正交性也可以表述为 $V_m\perp W_m^*$,$V_m^*\perp W_m$。

证明 先考虑对同一 m:

$$(\psi_{m,k},\psi_{m,n}^*)$$

$$=\frac{1}{2\pi}(\hat{\psi}_{m,k},\hat{\psi}_{m,n}^*)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2^{\frac{m}{2}}\cdot 2^{-m}\mathrm{e}^{-i\frac{k}{2^m}\omega}\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)\cdot\overline{2^{\frac{m}{2}}\cdot 2^{-m}\mathrm{e}^{-i\frac{n}{2^m}\omega}\hat{\psi}^*\left(\frac{\omega}{2^m}\right)}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)\overline{\hat{\psi}^*\left(\frac{\omega}{2^m}\right)}e^{-i(k-n)\cdot\frac{\omega}{2^m}}\mathrm{d}\left(\frac{\omega}{2^m}\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}(\omega)\overline{\hat{\psi}^*(\omega)}e^{-i(k-n)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Q(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{S(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-i(k-n)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\int_{2j\pi}^{2(j+1)\pi}Q(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}\right)\overline{S(e^{-i\frac{\omega}{2}})\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}\right)}e^{-i(k-n)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\int_{0}^{2\pi}Q(e^{-i\frac{\omega}{2}+j\pi})\overline{S(e^{-i\frac{\omega}{2}+j\pi})}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+j\pi\right)$$

$$\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+j\pi\right)}e^{-i(k-n)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left\{\sum_{l\in\mathbf{Z}}Q(e^{-i(\frac{\omega}{2}+2l\pi)})\overline{S(e^{-i(\frac{\omega}{2}+2l\pi)})}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right.$$

$$\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)}e^{-i(k-n)\omega}+\sum_{l\in\mathbf{Z}}Q(e^{-i(\frac{\omega}{2}+(2l+1)\pi)})$$

$$\overline{S(e^{-i(\frac{\omega}{2}+(2l+1)\pi)})}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+(2l+1)\pi\right)$$

$$\left.\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+(2l+1)\pi\right)}e^{-i(k-n)\omega}\right\}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left\{\sum_{l\in\mathbf{Z}}Q(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{S(e^{-i\frac{\omega}{2}})}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right.$$

$$\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)}+Q(-e^{-i\frac{\omega}{2}})S(-e^{-i\frac{\omega}{2}})$$

$$\left.\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2l\pi\right)\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+\pi+2l\pi\right)}\right\}e^{-i(k-n)\omega}\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left\{Q(e^{-i\frac{\omega}{2}})\overline{S(e^{-i\frac{\omega}{2}})}\sum_{l\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)\right.$$

$$\overline{\hat{\varphi}^*\left(\frac{\omega}{2}+2l\pi\right)}+Q(-e^{-i\frac{\omega}{2}})S(-e^{-i\frac{\omega}{2}})$$

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2l\pi\right)\overline{\hat{\varphi}^{*}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2l\pi\right)}\Bigg\} e^{-i(k-n)\omega} d\omega。$$

因为 $\varphi(t)$和 $\varphi^{*}(t)$是一对对偶，在定理 5.5 中已证明过

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right)\overline{\hat{\varphi}^{*}\left(\frac{\omega}{2} + 2l\pi\right)} = 1,$$

$$\sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{\varphi}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2l\pi\right)\overline{\hat{\varphi}^{*}\left(\frac{\omega}{2} + \pi + 2l\pi\right)} = 1。$$

又由定理 5.5 可知 $Q(z)$和 $S(z)$也是一对对偶，故有 $Q(z)\overline{S(z)} + Q(-z)\overline{S(-z)} = 1$，是在 $|z| = 1$ 上。

所以就得到 $(\psi_{m,k}, \psi_{m,n}^{*}) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-i(k-n)\omega} d\omega = \delta_{kn}$。

类似地可证 $V_m \perp W_m^{*}$，$V_m^{*} \perp W_m$。

最后证明：$(\psi_{m,n}, \psi_{j,k}^{*}) = \delta_{mj}\delta_{nk}$。

不妨设 $m < j$，则 $\psi_{m,n}(t) \in W_m \subset V_j$。

由于 $V_j \perp W_j^{*}$，且 $W_j^{*} = \overline{\mathrm{span}\{\psi_{j,k}^{*}, k \in \mathbf{Z}\}}$，$V_j$ 中的元素均与$\psi_{j,k}^{*}(t)$正交。所以当 $m < j$ 时，$(\psi_{m,n}, \psi_{j,k}^{*}) = 0$，对任意的整数 n，k 成立。

当 $m > j$ 时，类似地可证 $(\psi_{m,n}, \psi_{j,k}^{*}) = 0$，对任意的整数 n，k 成立。

当 $m = j$ 时，前面已证得 $(\psi_{m,n}, \psi_{m,k}^{*}) = \delta_{nk}$。

所以就有 $(\psi_{m,n}, \psi_{j,k}^{*}) = \delta_{mj} \cdot \delta_{nk}$。这就证明了 $\psi(t)$和 $\psi^{*}(t)$的对偶性。$(\psi_{m,n}, \psi_{j,k}^{*}) = \delta_{mj} \cdot \delta_{nk}$ 又称双正交性。

注意，现在 $\psi(t)$和 $\psi^{*}(t)$不等，所以不是自对偶的，因此 $\psi(t)$和 $\psi^{*}(t)$都不是正交小波，但都是 R 小波，所以$\{\psi_{m,n}(t), m, n \in \mathbf{Z}\}$和$\{\psi_{k,j}^{*}(t), k, j \in \mathbf{Z}\}$都是 L^2 的 Riesz 基。对于 $f(t) \in L^2$，$f(t)$ 可以展开为小波级数 $f(t) = \displaystyle\sum_{m,n \in \mathbf{Z}} c_{mn}\psi_{m,n}(t)$ 或 $f(t) = \displaystyle\sum_{m,n \in \mathbf{Z}} c_{mn}^{*}\psi_{m,n}^{*}(t)$，为了求出这个展开式的系数，可以利用 $\psi_{m,n}(t)$和 $\psi_{m,n}^{*}(t)$的双正交性质，在展开式两边用 $\psi_{j,k}^{*}$或 $\psi_{j,k}$与其作内积，分别得到

$$(f, \psi_{j,k}^{*}) = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} c_{mn}(\psi_{m,n}, \psi_{j,k}^{*}) = c_{jk},$$

$$(f, \psi_{j,k}) = \sum_{m,n \in \mathbf{Z}} c_{mn}^{*}(\psi_{m,n}^{*}, \psi_{j,k}) = c_{jk}^{*}。$$

所以，如果 $f(t)$ 按基 $\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 展开，则展开系数为 $(f,\ \psi^*_{m,n})$，$f(t)=\sum\limits_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\ \psi^*_{m,n})\psi_{m,n}(t)$。$f(t)$ 也可以按基 $\{\psi^*_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 展开式，那么展开系数就是 $(f,\ \psi_{m,n})$，$f(t)=\sum\limits_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\ \psi_{m,n})\psi^*_{m,n}(t)$。特别，当 $\psi(t)$ 是自对偶时，$f(t)=\sum\limits_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\ \psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)$。

如果对 $f(t)=\sum\limits_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\ \psi_{m,n})\psi^*_{m,n}(t)$ 两边与 $g(t)\in L^2$ 再作内积，可以得到内积公式 $(f,\ g)=\sum\limits_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\ \psi_{m,n})(\psi^*_{m,n},\ g)$。把 L^2 中的任一函数 $f(t)$ 展开为一个级数 $f(t)=\sum\limits_{m,n\in \mathbf{Z}}c_{mn}\psi_{m,n}(t)$，且系数 $\{c_{mn},\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 惟一，这无论是在理论上，还是在实际应用中都是很有用的，对于一个满足允许性条件 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega<\infty$ 的小波母函数 $\psi(t)$，离散化以后得到的 L^2 中的一列函数 $\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$，不一定能构成 L^2 的一组基，只有 R 小波经离散化后才能成为 L^2 的 Riesz 基，L^2 中的函数按 Riesz 基展开，其系数惟一确定，且 R 小波 $\psi(t)$ 必存在对偶小波 $\psi^*(t)$，$\psi^*(t)$ 经离散化后，也成为 L^2 的 Riesz 基，$\{\psi^*_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 称为 $\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 的对偶基。

§5.4 非正交小波

正交小波基具有极好的性质，一个 L^2 中的函数 $f(t)$ 在正交小波基下的展开式 $f(t)=\sum\limits_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\ \psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)$ 对信号的局部性分析有极大的方便。但要使一个函数 $\psi(t)$ 的伸缩和平移 $\{\psi_{m,n}(t)=2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t-n),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 能够构成 L^2 的标准正交基是相当困难的。何况还进一步希望 $\psi(t)$ 要有良好的局部性、光滑性、对称性等等，这就给正交小波母函数 $\psi(t)$ 的构造带来了极大的困难。

现在从另一个角度出发考虑，我们放弃正交性的要求，而使小波母

函数的构造简单，且在局部性、对称性、光滑性等方面具有更好的性质。可满足实际问题的要求。

离散小波的一个重要作用就是将一个 L^2 中的函数展开为一个级数 $f(t) = \sum_{m,n\in Z} c_{mn}\psi_{m,n}(t)$，要达到这个目的，当然要求小波母函数 $\psi(t)$ 是一个 R 小波，因为 R 小波可以生成 L^2 的一个 Riesz 基。

定义 5.6 设 $\psi(t)$是一个 R 小波。

如果 $(\psi_{m,n}, \psi_{l,k}) = \delta_{ml}\cdot\delta_{nk}$，则称 $\psi(t)$为正交小波；

如果 $(\psi_{m,n}, \psi_{l,k}) = 0$，当 $m \neq l$ 时成立，则称 $\psi(t)$是一个半正交小波；

如果 $\psi(t)$不是半正交小波，则称 $\psi(t)$是非正交小波。

即使是非正交小波，对于 $\psi(t)$还存在对偶小波 $\psi^*(t)$满足双正交性质 $(\psi_{m,n}, \psi^*_{l,k}) = \delta_{ml}\cdot\delta_{nk}$，所以非正交小波有时又称双正交小波。根据前面第四章的讨论可知，一个正交小波可以确定 L^2 的一个正交分解，$L^2 = \bigoplus_{m\in Z} W_m$，$m\neq l$ 时，$W_m \perp W_l$，而且$\{\psi_{m,n}(t), n\in Z\}$ 就是 W_m 的标准正交基。对于 $f(t)\in L^2$，$f(t) = \sum_{m\in Z} f_m(t)$，$f_m(t)\in W_m$，$f_m(t) = \sum_{n\in Z} c_n\psi_{m,n}(t)$，且$(f_m, f_l) = 0$，当$m\neq l$时，正交小波关于两个下标的正交性质$(\psi_{m,n}, \psi_{l,k}) = \delta_{ml}\cdot\delta_{nk}$ 包含了两个意义，关于第一个下标的正交性，实际上就是实现了 L^2 的一个正交分解，$L^2 = \bigoplus_{m\in Z} W_m$；关于第二个下标的正交性，就是关于 W_m 的基的正交性。

一个半正交的小波，是关于第一个下标正交，由此可知，一个半正交小波 $\psi(t)$，同样可以确定 L^2 的一个正交分解 $L^2 = \bigoplus_{m\in Z} W_m$；当 $m\neq l$ 时，$W_m \perp W_l$，$W_m = \overline{\mathrm{span}\{\psi_{m,n}(t), n\in Z\}}$，但$\{\psi_{m,n}(t), n\in Z\}$不是 W_m 的正交基，而仅仅是 Riesz 基，但在有些情况下，这也就够了。

下面讨论半正交小波的一些性质。

定理 5.7 设 $\varphi(t)\in L^2$，则$(\varphi(t-k), \varphi(t-l)) = \delta_{kl}$ 的充分必要条件是 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega}d\omega = \delta_{kl}$。

证明 $\quad (\varphi(t-k), \varphi(t-l))$

$$= \frac{1}{2\pi}(\hat{\varphi}(\omega)e^{-ik\omega}, \hat{\varphi}(\omega)e^{-il\omega})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\varphi}(\omega)e^{-ik\omega} \overline{\hat{\varphi}(\omega)e^{-il\omega}} d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega} d\omega.$$

在第四章中，曾经证明了 $(\varphi(t-k), \varphi(t-l)) = \delta_{kl}$ 的充分必要条件是 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2 \equiv 1$。

所以条件 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2 \equiv 1$ 与 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega} d\omega = \delta_{kl}$ 等价。

上述条件是 $\varphi(t)$ 的平移 $\{\varphi(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 构成子空间 V_0 的标准正交基的充分必要条件。放宽一点要求，$\{\varphi(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 成为 V_0 的 Riesz 基的条件又是什么呢？

定理 5.8 $\varphi(t)\in L^2$，则 $\{\varphi(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 满足 Riesz 条件（即可以成为某一子空间的 Riesz 基）的充分必要条件是存在常数 A，B 使 $0 < A \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2 \leqslant B < \infty$ 对任意的 $\omega\in\mathbf{R}$，几乎处处成立。

证明 略。

这就是说，对于一个函数 $\varphi(t)\in L^2$，如果满足 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2 \equiv 1$ 或 $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}(\omega)|^2 e^{-i(k-l)\omega} d\omega = \delta_{kl}$，则 $\{\varphi(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 可以构成子空间 V_0 的标准正交基。如果仅满足 $0 < A \leqslant \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)|^2 \leqslant B < \infty$ 或对任意的序列 $C=\{c_k\}\in l^2$ 满足 $A\|C\|_{l^2}^2 \leqslant \|\sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\varphi(t-k)\|_{L^2}^2 \leqslant B\|C\|_{l^2}^2$（即所谓 Riesz 条件），则 $\{\varphi(t-n), n\in\mathbf{Z}\}$ 构成子空间 V_0 的 Riesz 基。

对于离散小波 $\{\psi_{m,n}(t), m, n\in\mathbf{Z}\}$，重要的是把 L^2 中的任一函数 $f(t)$ 按离散小波 $\psi_{m,n}(t)$ 展开为一个小波级数 $f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} c_{mn}\psi_{m,n}(t)$，展开系数 $c_{m,n}$ 要能比较方便地求出。要达到这个目的，关键在于求出

其对偶 $\psi^*(t)$，因为 $f(t)=\sum_{m,n\in Z}(f,\psi^*_{m,n})\psi_{m,n}(t)=\sum_{m,n\in Z}(f,\psi_{m,n})\psi^*_{m,n}(t)$。对于正交小波，由于是自对偶的，不存在任何问题。对于半正交小波和非正交小波的情况又如何呢？

定理5.9 $\psi(t)\in L^2$ 是一个半正交小波，$\hat{\psi}^*(\omega)=\dfrac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k\in Z}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2}$，则 $\psi^*(t)$ 是 $\psi(t)$ 的对偶小波。

证明 因为 $\psi(t)$ 是半正交小波，所以 $\{\psi_{m,n}(t),\ m,n\in \mathbf{Z}\}$ 是 L^2 的一个 Riesz 基，且存在常数 A，B，使

$$0<A\leqslant\sum_{k\in Z}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<\infty。$$

由于 $\psi^*(t)\in L^2$，所以有展开式 $\psi^*_{l,k}(t)=\sum_{j\in Z}a_j\psi_{l,j}(t)$，且 $\{a_j\}\in l^2$。

现需证明 $(\psi^*_{l,k},\psi_{m,n})=\delta_{lm}\cdot\delta_{kn}$。

当 $l\neq m$ 时，

$$\begin{aligned}(\psi^*_{l,k},\psi_{m,n})&=\Big(\sum_{j\in Z}a_j\psi_{lj},\psi_{m,n}\Big)\\&=\sum_{j\in Z}a_j(\psi_{l,j},\psi_{m,n})。\end{aligned}$$

由于 $\psi(t)$ 是半正交小波，所以当 $l\neq m$ 时，$(\psi_{l,j},\psi_{m,n})=0$ 对任意的 $j\in\mathbf{Z}$ 成立。

当 $l=m$ 时，(ψ_{ln},ψ^*_{lk})

$$\begin{aligned}&=\int_{-\infty}^{+\infty}2^{\frac{l}{2}}\psi(2^lt-n)\cdot 2^{\frac{l}{2}}\overline{\psi^*(2^lt-k)}\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(2^lt-n)\overline{\psi^*(2^lt-k)}\mathrm{d}(2^lt)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x-n)\overline{\psi^*(x-k)}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{\psi}(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-k)\omega}\overline{\hat{\psi}^*(\omega)}\mathrm{d}\omega\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in Z}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi}\hat{\psi}(\omega)\overline{\hat{\psi}^*(\omega)}e^{-i(n-k)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in Z}\hat{\psi}(\omega+2k\pi)\overline{\hat{\psi}^*(\omega+2k\pi)}e^{-i(n-k)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k\in Z}\hat{\psi}(\omega+2k\pi)\overline{\left[\frac{\hat{\psi}(\omega+2k\pi)}{\sum_{s\in Z}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi+2s\pi)|^2}\right]}e^{-i(n-k)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sum_{k\in Z}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2}{\sum_{m\in Z}|\hat{\psi}(\omega+2m\pi)|^2}e^{-i(n-k)\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-i(n-k)\omega}d\omega$$

$$= \delta_{nk}。$$

综合以上两个结论：$l \neq m$ 时，$(\psi_{m,n}, \psi_{lk}^*) = 0$，

$l = m$ 时，$(\psi_{ln}, \psi_{lk}^*) = \delta_{nk}$。

所以，$(\psi_{m,n}, \psi_{l,k}^*) = \delta_{ml}\cdot\delta_{nk}$。

我们在第四章中曾经介绍过正交化公式，$\hat{\psi}^*(\omega) = \dfrac{\hat{\psi}(\omega)}{\sqrt{\sum_{k\in Z}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2}}$，由此得到的小波 $\psi^*(t)$是正交小波，因而是自对偶的。但由定理 5.9 可知，这个正交化公式仅仅是对半正交的小波 $\psi(t)$才有效。如果 $\psi(t)$是一个非正交小波，那么这个正交化公式是无效的。换句话说，这个正交化公式可以把 L^2 的子空间的 Riesz 基化为正交基，但不可能使 L^2 的非正交分解转化为正交分解。

对于一个信号 $f(t)$，由 $f(t)$的小波变换 $W_\psi f$ 来重建 $f(t)$是小波应用的一个极其重要的问题，对于连续小波，半离散的二进小波以及离散的正交小波的反演公式，前面都已经讨论了。那么对于离散小波变换 $\left\{(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right), m, n\in \mathbf{Z}\right\}$ 除了正交小波外，如何实现 $f(t)$的

重建呢。

$\psi(t)$是一个 R 小波,由于$\{\psi_{m,n}(t), m, n\in \mathbf{Z}\}$是$L^2$的 Riesz 基,所以对于$f(t)\in L^2$,必有惟一的表示式$f(t)=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}} c_{mn}\psi_{mn}(t)$。又根据对偶小波的理论,对于一个 R 小波必存在对偶小波$\psi^*(t)$,满足双正交性质$(\psi_{m,n}, \psi^*_{k,l})=\delta_{mk}\cdot\delta_{nl}$,使$f(t)=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right)\psi^*_{m,n}(t)$。所以,对于非正交或半正交的离散小波变换$\left\{(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right), m, n\in \mathbf{Z}\right\}$,要重建$f(t)$,必须知道其对偶小波$\psi^*(t)$。而对于半正交的小波,有公式可求其对偶小波,但对非正交的小波则缺乏有效的通用的求对偶小波的方法。由此也可见,将L^2空间分解为相互正交的子空间W_m的正交和$L^2=\bigoplus_{m\in \mathbf{Z}} W_m$是离散小波变换的核心。

从连续小波变换的反演到半离散的二进小波变换的反演,半离散的小波变换所短缺的信息,由稳定性条件$0<A\leqslant\sum_{k\in \mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2\leqslant B<\infty$加以弥补。对于半正交的离散小波变换$\left\{(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right), m, n\in \mathbf{Z}\right\}$包含的信息比半离散小波变换更少,要实现重建,满足的条件是$0<A\leqslant\sum_{k\in \mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<\infty$。

定理 5.10 设$\psi(t)\in L^2$,如果存在常数A,B,使$0<A\leqslant\sum_{k\in \mathbf{Z}}|\hat{\psi}(\omega+2k\pi)|^2\leqslant B<\infty$,对$\omega\in \mathbf{R}$几乎处处成立,则必有$0<A\leqslant\sum_{k\in \mathbf{Z}}|\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2\leqslant B<\infty$,对$\omega\in \mathbf{R}$几乎处处成立。

证明 略。

从中我们也可以看出,由于离散小波变换$\left\{(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^m}, \frac{n}{2^m}\right), m, n\in \mathbf{Z}\right\}$比半离散小波变换$\left\{(W_\psi f)\left(\frac{1}{2^m}, b\right), m\in \mathbf{Z}, b\in \mathbf{R}\right\}$包含的信息更少,因此重建的条件当然也就更强。

当 $0 < A \leqslant \sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 \leqslant B < \infty$，几乎处处成立时，$\psi(t)$ 的整数平移 $\{\psi(t-n),\ n \in \mathbf{Z}\}$ 可以成为 Riesz 基。特别当 $A = B = 1$ 时，$\{\psi(t-n),\ n \in \mathbf{Z}\}$ 就成为标准正交基。而由定理 5.10，这时必有 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2 = 1$，几乎处处成立。因此 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1$ 几乎处处成立是 $\{\psi(t-n),\ n \in \mathbf{Z}\}$ 成为标准正交系的充分必要条件。而 $\sum_{k \in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2 = 1$ 几乎处处成立，则成为必要条件。

这里特别要指出，二进小波不一定是 R 小波。因此，在研究连续小波时，我们只要求 $\psi(t)$ 满足允许性条件。但是连续小波不一定就是二进小波，当然也不一定是 R 小波。当需要研究半离散小波时，就希望 $\psi(t)$ 是二进小波。当需要研究离散小波时，就希望 $\psi(t)$ 是 R 小波。

那么，如果我们把一个满足允许性条件的连续小波，或者满足稳定性条件的二进小波 $\psi(t)$，直接离散化 $\psi_{m,n}(t) = 2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m t - n)$，$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n \in \mathbf{Z}\}$ 将能起到什么样的作用呢。

§5.5 小波框架

设 H 是一个 Hilbert 空间，$\{\varphi_k,\ k \in J\}$ 是 H 中的一族元素，这里 J 不一定是整数集。对于 H 中的任一元素 f，记 $c_k = (f,\ \varphi_k)$，现在讨论由 $\{c_k,\ k \in J\}$ 重建 f 的问题。

设 $f_1,\ f_2 \in H$，当 $f_1,\ f_2$ 很"接近"，即 $\|f_1 - f_2\|$ 很小时，$\sum_{k \in J} |(f_1,\ \varphi_k) - (f_2,\ \varphi_k)|^2$ 也应很小，即 $\sum_{k \in J} |(f,\ \varphi_k)|^2 \leqslant B\|f\|^2$。这里 B 是一个常数；反之，当 $(f_1,\ \varphi_k)$ 与 $(f_2,\ \varphi_k)$ 很接近时，$\|f_1 - f_2\|$ 也应很小，即 $A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k \in J} |(f,\ \varphi_k)|^2$，只有这样才能保证计算的稳定性。因此，$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k \in J} |(f,\ \varphi_k)|^2 \leqslant B\|f\|^2$ 称为稳定性条件。

定义 5.7 Hilbert 空间中的一族元素 $\{\varphi_k,\ k \in J\}$，如果对于任意的 $f \in H$，存在与 f 无关的常数 $0 < A < B < \infty$，使稳定性条件

$A\|f\|^2 \leqslant \sum_{k\in J} |(f, \varphi_k)|^2 \leqslant B\|f\|^2$ 成立，则称$\{\varphi_k, k\in J\}$是 H 的一个框架。A, B 称为框架的上、下界。若 $A = B$，则称$\{\varphi_k, k\in J\}$是一个紧框架。

框架是比基有更宽松的条件。Riesz 基也是一种框架，但框架不一定是基，框架中的元素可能是线性相关的。

例 5.1 设 $H = \mathbf{R}^3$，取 $\varphi_1 = (1, -1, 0)$，$\varphi_2 = (0, 1, -1)$，$\varphi_3 = (-1, 0, 1)$，$\varphi_4 = (1, 1, 1)$。对于任意的 $f = (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$，$(f, \varphi_1)^2 = (x-y)^2$，$(f, \varphi_2)^2 = (y-z)^2$，$(f, \varphi_3)^2 = (-x+z)^2$，$(f, \varphi_4)^2 = (x+y+z)^2$，因此有 $\sum_{k=1}^{4} |(f, \varphi_k)|^2 = 3\|f\|^2$，所以$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$是 $\mathbf{R}^3$ 的一个框架，而且是紧框架，$A = B = 3$，但$\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$显然是线性相关的。

$\{\varphi_k, k\in J\}$ 是 H 的一个框架，如果 $\{\varphi_k, k\in J\}$ 还是线性无关的，即当 $\sum_{k\in J} a_k\varphi_k = 0$ 时，必有 $a_k = 0$，$k\in J$，则$\{\varphi_k, k\in J\}$ 必为 H 的一个 Riesz 基，反之亦然。

定理 5.11 $\{\varphi_k, k\in J\}$ 是 H 的一个 Riesz 基的充分必要条件是$\{\varphi_k, k\in J\}$是一个框架，且是一个线性无关族。

现在我们考虑一个小波母函数 $\psi(t)$，经伸缩和平移得到的$\{\psi_{m,n}(t), m, n\in \mathbf{Z}\}$构成 L^2 的框架的问题。显然，一个 R 小波 $\psi(t)$可以生成 L^2 的一个框架。那么除了 R 小波，还有什么样的小波可以生成小波框架呢？

定理 5.12 设 $\psi(t) \in L^2$，如果$\{\psi_{m,n}(t), m, n\in \mathbf{Z}\}$是 L^2 的具有框架界 A, B 的框架，则必有 $A \leqslant \sum_{k\in \mathbf{Z}} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2 \leqslant B$，几乎处处成立。

这就是说，一个 L^2 中的函数 $\psi(t)$，经伸缩和平移后得到的一族函数$\{\psi_{m,n}(t), m, n\in \mathbf{Z}\}$要能构成 L^2 的一个框架，必要条件是 $\psi(t)$是一个二进小波，换句话说，并不是任何一个满足允许性条件的小波母函数 $\psi(t)$，都能生成小波框架的。

现在设$\{\psi_{m,n}(t), m, n\in \mathbf{Z}\}$是一个小波框架，我们感兴趣的是，能否由 f 的离散小波变换 $(f, \psi_{m,n}) = a_{m,n}, m, n \in \mathbf{Z}$ 来重建 $f(t)$。

$\{\psi_{m,n}(t); m, n \in \mathbf{Z}\}$ 是一个小波框架，记

$g(t) = \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)$。定义算子 T：$Tf = g = \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)$，则

$$
\begin{aligned}
(Tf, f) = (g, f) &= \Big(\sum_{m,n\in \mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})\psi_{m,n}(t), f(t)\Big) \\
&= \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})(\psi_{m,n}, f) \\
&= \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} |(f, \psi_{m,n})|^2。
\end{aligned}
$$

如果 $Tf = g = 0$，则有 $\sum_{m,n\in \mathbf{Z}} |(f, \psi_{m,n})|^2 = 0$，$(f, \psi_{m,n}) = 0$，$m, n \in \mathbf{Z}$，这时有 $f = 0$。

而且又有 $A\|f\|^2 \leqslant \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} |(f, \psi_{m,n})|^2 = (Tf, f) \leqslant B\|f\|^2$。因此，$T$ 是一一对应的线性有界算子，故存在逆算子 T^{-1}，$T^{-1}g = f$。且由稳定性条件可知

$$
A\|T^{-1}g\|^2 = A\|f\|^2 \leqslant \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} |(f, \psi_{m,n})|^2 = (g, T^{-1}g) \leqslant
$$

$\|g\| \|T^{-1}g\|$，即 $\|T^{-1}g\| \leqslant \frac{1}{A}\|g\|$。

$$
\begin{aligned}
f = (T^{-1}T)f &= T^{-1}(Tf) \\
&= T^{-1}\Big(\sum_{m,n\in \mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)\Big) \\
&= \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})(T^{-1}\psi_{m,n}(t))。
\end{aligned}
$$

记 $T^{-1}\psi_{m,n}(t) = \psi^*_{m,n}(t)$，就有表达式

$$
f(t) = \sum_{m,n\in \mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})\psi^*_{m,n}(t)。
$$

$\{\psi^*_{m,n}(t), m, n\in \mathbf{Z}\}$称为$\{\psi_{m,n}(t), m, n\in \mathbf{Z}\}$的对偶。根据 Hilbert

空间的框架理论，可以证明$\{\psi^*_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$也是一个框架，其框架的上、下界分别为$\frac{1}{A}$，$\frac{1}{B}$，且有表示式 $f(t)=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\psi^*_{m,n})\psi_{m,n}(t)$。因此，当$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$是小波框架时，要由 $f(t)$的离散小波变换$(f,\psi_{m,n})$来重建原信号 $f(t)$，需要知道$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$的对偶$\{\psi^*_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$。

如果$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$是 L^2 的紧框架，则
$\| f\|^2=\frac{1}{A}\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}|(f,\psi_{m,n})|^2$。而$f=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\psi_{m,n})\psi^*_{m,n}(t)$，两边与$f$作内积得到 $\|f\|^2=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\psi_{m,n})(\psi^*_{m,n},f)=\frac{1}{A}\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}|(f,\psi_{m,n})|^2$。所以有$(\psi^*_{m,n},f)=\frac{1}{A}(\psi_{m,n},f)$对任意的 $f\in L^2$ 成立。因此在紧框架的情况下，$f(t)$有表示式，$f(t)=\frac{1}{A}\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)$。

值得注意的是，由于框架$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$可能是线性相关的，即有非零序列$\{c_{m,n},\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$使 $\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}c_{m,n}\psi_{m,n}(t)=0$。这样，$f(t)$的表达式又可写成 $f(t)=\frac{1}{A}\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}[(f,\psi_{m,n})+c_{m,n}]\psi_{m,n}(t)$。如果$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 不仅是紧框架，且 $A=1$，这时$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$ 成为正交小波基。

定理 5.13 $\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$是标准正交基的充分必要条件是$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$是紧框架，且 $A=1$，$\|\psi_{m,n}(t)\|=1,\ m,\ n\in \mathbf{Z}$。

证明 必要性是显然的。
现证明充分性。

因为$\{\psi_{m,n}(t),\ m,\ n\in \mathbf{Z}\}$是 $A=1$ 的紧框架，故对任意的 $f(t)\in L^2$ 有 $f(t)=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(f,\psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)$，特别取 $f(t)=\psi_{k,l}(t)$，则

$$\psi_{k,l}(t)=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}(\psi_{k,l},\psi_{m,n})\psi_{m,n}(t)，且有$$

$$\|\psi_{k,l}(t)\|^2=\sum_{m,n\in \mathbf{Z}}|(\psi_{k,l},\psi_{m,n})|^2=\|\psi_{k,l}(t)\|^4+\sum_{\substack{m\neq k\\ n\neq l}}|(\psi_{k,l},\psi_{m,n})|^2。$$

因为已知 $\|\psi_{k,l}(t)\|^2 = 1$，所以 $\sum_{\substack{m\neq k \\ n\neq l}} |(\psi_{k,l}, \psi_{m,n})|^2 = 0$，即 $(\psi_{k,l}, \psi_{m,n}) = 0$，当 $m\neq k$，$n\neq l$ 至少一个成立时，所以 $(\psi_{k,l}, \psi_{m,n}) = \delta_{km} \cdot \delta_{nl}$。

对于非紧框架的情况，要求出对偶常常是很困难的，可以根据 $\psi_{m,n}^*(t) = T^{-1}\psi_{m,n}(t)$ 来求得 $\psi_{m,n}^*(t)$ 的近似。当 A，B 比较接近时，可取一阶近似 $\psi_{m,n}^*(t) = \frac{2}{A+B}\psi_{m,n}(t)$，这时

$$f(t) = \sum_{m,n\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})\psi_{m,n}^*(t) = \frac{2}{A+B}\sum_{m,n\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{m,n})\psi_{m,n}(t) + R(f),$$

这里 $R(f)$ 是误差函数，其范数为 $\|R(f)\| \leqslant \frac{B-A}{B+A}\|f\|$。$A$，$B$ 越接近，逼近效果越好。因此框架的上、下界对计算有着很大影响。

定理 5.14 $\{\psi_{m,n}(t), m, n\in\mathbf{Z}\}$ 是一个小波框架，则其上、下界 A，B 满足

$$A \leqslant \frac{\pi}{\ln 2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega \leqslant B。$$

第六章　多维小波和向量小波

§6.1　多维小波

定义 6.1　$\psi(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$，如果$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega_1, \omega_2)|^2}{|\omega_1^2+\omega_2^2|}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2$收敛，则称 $\psi(x, y)$ 是一个二维小波母函数。

通常，二维小波由一维小波通过张量积构造，即设 $\psi(x)$是一个一维小波母函数，$\psi(x, y) = \psi(x)\psi(y)$ 就是一个二维小波母函数。$\psi_{a,b,c}(x, y) = \frac{1}{|a|}\psi\left(\frac{x-b}{a}, \frac{y-c}{a}\right)$，$a \neq 0$，称为二维连续小波。取定 a_0，b_0，c_0，则 $\psi_{m,n_1,n_2}(x, y) = a_0^m\psi(a_0^m x - n_1 b_0, a_0^m y - n_2 c_0)$ 称为二维离散小波，这里 m，n_1，n_2 为整数。通常取 $a_0 = 2$，$b_0 = 1$，$c_0 = 1$，$\psi_{m,n_1,n_2}(x, y) = 2^m\psi(2^m x - n_1, 2^m y - n_2)$。

定义 6.2　设 $f(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$，$\psi(x, y)$ 是一个二维小波母函数，$(W_\psi f)(a, b, c) = (f, \psi_{a,b,c}) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\frac{1}{|a|}\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}, \frac{y-c}{a}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为 $f(x, y)$的二维连续小波变换。

$(W_\psi f)(m, n_1, n_2) = (f, \psi_{m,n_1,n_2}) = 2^m\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\psi(2^m x - n_1, 2^m y - n_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 称为 $f(x, y)$的二维离散小波变换。

下面讨论二维多分辨分析和二维正交小波基。

设 $\varphi(x)$，$\{V_m, m\in \mathbf{Z}\}$是一个一维正交多分辨分析，相应的有小波空间 W_m 和正交小波母函数 $\psi(x)$。作张量积 $V_m^2 = V_m \otimes V_m$。V_m^2 是

$L^2(\mathbf{R}^2)$ 的子空间，$m \in \mathbf{Z}$。

显然满足 $\cdots V_{m-1}^2 \subset V_m^2 \subset V_{m+1}^2 \subset \cdots$，$\overline{\bigcup_{m\in \mathbf{Z}} V_m^2} = L^2(\mathbf{R}^2)$，$\bigcap_{m\in \mathbf{Z}} V_m^2 = \{\theta\}$。$\theta$ 是 $L^2(R^2)$ 中的零元素。

由于 $\{2^{\frac{m}{2}}\varphi(2^m x - n),\ n\in \mathbf{Z}\}$ 是 V_m 的标准正交基，故 $\{2^m\varphi(2^m x - n_1)\varphi(2^m y - n_2),\ n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_m^2 的标准正交基。

在一维情况下，W_m 是 V_m 在 V_{m+1} 中的正交补，即 V_{m+1} 有正交分解 $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$，且 $\{2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m x - n),\ n \in \mathbf{Z}\}$ 是 W_m 的标准正交基。由于 $W_m \perp W_l$，$m \neq l$，故 $L^2 = \bigoplus_{m\in \mathbf{Z}} W_m$，$\{2^{\frac{m}{2}}\psi(2^m x - n),\ m,\ n \in \mathbf{Z}\}$ 就是 L^2 的正交小波基。

那么在二维情况下，是否有 $\{\psi_{m,n_1,n_2}(x,\ y),\ m,\ n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}\}$，就是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的二维正交小波基呢？情况并非如此。

先把 $V_{m+1}^2 = V_{m+1} \otimes V_{m+1}$ 作正交分解。现要求出 V_m^2 在 V_{m+1}^2 中的正交补 W_m^2，并求出 W_m^2 的标准正交基。

$$
\begin{aligned}
V_{m+1}^2 &= V_{m+1} \otimes V_{m+1} \\
&= (V_m \oplus W_m) \otimes (V_m \oplus W_m) \\
&= (V_m \otimes V_m) \oplus (V_m \otimes W_m) \oplus (W_m \otimes V_m) \oplus (W_m \otimes W_m) \\
&= V_m^2 \oplus W_m^2。
\end{aligned}
$$

这里 $V_m^2 = V_m \otimes V_m$，

$$W_m^2 = (V_m \otimes W_m) \oplus (W_m \otimes V_m) \oplus (W_m \otimes W_m)。$$

$\{2^m\varphi(2^m x - n_1)\varphi(2^m y - n_2),\ n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}\}$ 是 V_m^2 的标准正交基；

$\{2^m\varphi(2^m x - n_1)\psi(2^m y - n_2),\ n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}\}$ 是 $V_m \otimes W_m$ 的标准正交基；

$\{2^m\psi(2^m x - n_1)\varphi(2^m y - n_2),\ n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}\}$ 是 $W_m \otimes V_m$ 的标准正交基；

$\{2^m\psi(2^m x - n_1)\psi(2^m y - n_2),\ n_1,\ n_2 \in \mathbf{Z}\}$ 是 $W_m \otimes W_m$ 的标准正交基。

所以，$W_m^2=(V_m\otimes W_m)\oplus(W_m\otimes V_m)\oplus(W_m\otimes W_m)$ 是 V_m^2 在 V_{m-1}^2 中的正交补，且$\{2^m\varphi(2^mx-n_1)\psi(2^my-n_2),\ 2^m\psi(2^mx-n_1)\varphi(2^my-n_2),\ 2^m\psi(2^mx-n_1)\psi(2^my-n_2),\ n_1,\ n_2\in\mathbf{Z}\}$ 才是 W_m^2 的标准正交基。由 V_{m+1}^2，V_m^2，W_m^2 之间的关系可知，$\{W_m^2,\ m\in\mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的一个正交分解，$L^2(\mathbf{R}^2)=\bigoplus\limits_{m\in\mathbf{Z}}W_m^2$。记 $\psi^{(1)}(x,\ y)=\varphi(x)\psi(y)$，$\psi^{(2)}(x,\ y)=\psi(x)\varphi(y)$，$\psi^{(3)}(x,\ y)=\psi(x)\psi(y)$，则 $\{\psi_{m,n_1,n_2}^{(1)}(x,\ y),\ \psi_{m,n_1,n_2}^{(2)}(x,\ y),\ \psi_{m,n_1,n_2}^{(3)}(x,\ y),\ m,\ n_1,\ n_2\in\mathbf{Z}\}$ 是 $L^2(\mathbf{R}^2)$ 的正交小波基。

关于二维小波变换的反演公式，在连续小波的情况下，有 $f(x,\ y)=\frac{1}{c_\psi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(W_\psi f)(a,\ b,\ c)\psi\left(\frac{x-b}{a},\ \frac{y-c}{a}\right)\cdot\frac{1}{a^3}\mathrm{d}a\mathrm{d}b\mathrm{d}c$，这里 $c_\psi=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\hat{\psi}(\omega_1,\ \omega_2)|^2}{|\omega_1^2+\omega_2^2|}\mathrm{d}\omega_1\mathrm{d}\omega_2$。

在离散小波变换的情况下，重建公式就是一个级数表达式：

$$
\begin{aligned}
f(x,\ y)&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n_1\in\mathbf{Z}}\sum_{n_2\in\mathbf{Z}}(f,\ \psi_{m,n_1,n_2})\psi_{m,n_1,n_2}^*(x,\ y)\\
&=\sum_{m\in\mathbf{Z}}\sum_{n_1\in\mathbf{Z}}\sum_{n_2\in\mathbf{Z}}(f,\ \psi_{m,n_1,n_2}^*)\psi_{m,n_1,n_2}(x,\ y),
\end{aligned}
$$

这里 $\psi^*(x,\ y)$表示 $\psi(x,\ y)$的对偶。

§6.2　向量小波和向量积小波变换

随着小波变换及其应用的研究发展，近年来，国内外的一些学者开始研究更广泛的意义下的小波变换，如向量小波变换、带方向性的小波变换、向量积小波变换等，以适应解决各种问题的需要。

$$
\boldsymbol{\psi}(x)=\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\\ \vdots\\ \psi_r(x)\end{pmatrix}\ \text{称为一个 } r \text{ 维的向量小波。}
$$

而与小波有关的一些量，也相应地要以向量或矩阵来表示。如尺

度函数 $\varphi(x)$，在研究向量小波时，就要用尺度向量 $\boldsymbol{\varphi}(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \cdots\\ \varphi_r(x)\end{pmatrix}$ 来表示。双尺度序列 $\{p_n\}$，就要用矩阵序列 $\{\boldsymbol{A}_n\}$ 表示。双尺度方程 $\varphi(x)=\sum\limits_{n\in Z}p_n\varphi(2x-n)$，就演化为一个矩阵尺度方程 $\boldsymbol{\varphi}(x)=\sum\limits_{n\in Z}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{\varphi}(2x-n)$，这里 $\boldsymbol{A}_n$ 是 $r\times r$ 矩阵。由尺度向量可求得向量小波 $\boldsymbol{\psi}(x)=\sum\limits_{n\in Z}\boldsymbol{B}_n\boldsymbol{\varphi}(2x-n)$，$\boldsymbol{B}_n$ 也是一个 $r\times r$ 矩阵，但并非像小波函数那样简单地 $\boldsymbol{B}_n=(-1)^n\overline{\boldsymbol{A}}_{1-n}$。

本书所涉及的傅里叶变换，Gabor 变换，小波变换其实质都是一个信号 $f(x)$ 与一个变换母函数的内积。

傅里叶变换 $F[f(x)]=(f(x),\ \mathrm{e}^{-i\omega x})=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x$。

Gabor 变换 $G[f(x)]=(f(x),\ \overline{g(x-b)\mathrm{e}^{-i\omega x}})$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(x-b)\mathrm{e}^{-i\omega x}\mathrm{d}x。$$

小波变换 $(W_\psi f)(a,\ b)=(f(x),\ \psi_{a,b}(x))$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\ \overline{\psi_{a,b}(x)}\mathrm{d}x。$$

为了对各种信号作更深入的研究，李建平等一些学者引入了向量积小波变换，它是上述内积小波变换的一种推广。在向量积小波变换中，f 和 ψ 中至少有一个是向量，可以分如下几种情况：

(1) $f(x)$是标量，$\boldsymbol{\psi}(x)=(\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3)$，则 $f(x)$ 的向量积小波变换记为 $V(W_{\boldsymbol{\psi}}f)=f\times\boldsymbol{\psi}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ f&f&f\\ \psi_1&\psi_2&\psi_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}f&f\\ \psi_2&\psi_3\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}f&f\\ \psi_1&\psi_3\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}f&f\\ \psi_1&\psi_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}=((f,\ \psi_3)-(\psi_2,\ f),\ (\psi_1,\ f)-(f,\ \psi_3),\ (f_1,\ \psi_2)-(\psi_1,\ f))$。

(2) $f=(f_1,f_2,f_3)$，$\psi(x)$是标量，则 $V(W_\psi f) = f\times\psi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi & \psi & \psi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ \psi & \psi \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ \psi & \psi \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \psi & \psi \end{vmatrix} k = ((f_2,\psi)-(\psi, f_3),(\psi_1 f_3)-(f_1,\psi),(f_1,\psi)-(\psi,f_2))$。

(3) $f=(f_1,f_2,f_3)$，$\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$

$$V(W_\psi f) = f\times\psi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix} k = ((f_2,\psi_3)-(\psi_2,f_3),(\psi_1,f_3)-(f_1,\psi_3),(f_1,\psi_2)-(\psi_1,f_2))$$。

上述公式中变量 x，根据需要也可以是一个向量 $\boldsymbol{x}$。向量积小波变换中的向量都限制在三维。

对于 $f=(f_1,f_2,f_3,f_4)$，$\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3,\psi_4)$，可以如下定义 f 的向量积小波变换

$$V(W_\psi f) = \begin{vmatrix} i & j & k & l \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} f_2 & f_3 & f_4 \\ \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_3 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} k - \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} l$$

$$= \left(\begin{vmatrix} f_3 & f_4 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_2 & f_4 \\ \psi_2 & \psi_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}\right) i - \left(\begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_1 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_3 & f_4 \\ \psi_3 & \psi_4 \end{vmatrix}\right) j$$

$$+ \left(\begin{vmatrix} f_2 & f_4 \\ \psi_2 & \psi_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_1 & f_4 \\ \psi_1 & \psi_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix}\right) k - \left(\begin{vmatrix} f_2 & f_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} f_1 & f_3 \\ \psi_1 & \psi_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{vmatrix}\right) l$$。

向量积小波变换同样可以对信号进行分解与重建。这种将信号(标量或向量)变为一个向量,因而具有方向性,显示了运动的特征。

§6.3　二维小波变换的一种应用

图像数据压缩的基本原则是要使重建的图像在人的眼睛的视觉中不失真为前提,删去原来图像中的对人眼视觉影响不大的冗余信息,以达到压缩数据量的目的。通常,人眼视觉的主观评价是评价图像质量的主要标准,但是在理论上或技术上处理时还需要一个数量化的客观评价标准,这个客观评价标准一般是用均方误差。然而这个客观评价标准常常会与基于人眼视觉特性的主观评价标准不符。特别是在图像的轮廓、线条等突变部分,在人眼的视觉中往往起着重要的作用,而这种突变部分往往“量”又很小,在均方误差中表现并不突出。从数学上讲,图像信号的突变部分就是信号函数的奇性部分,因此考虑图像的质量,既要考虑“量”的大小,又要考虑奇性部分的强弱。这里所谓奇性的强弱,是指函数的光滑程度。我们把无限次可导的函数称为无奇性的,若函数在某处有间断或某阶导数不连续,那么就称函数在该处有奇性,函数越光滑,奇性就越弱。根据傅里叶变换的知识知道,一个函数$f(t)$越光滑,则其傅里叶变换$\hat{f}(\omega)$在$\omega\to\infty$时,$\hat{f}(\omega)$趋于零的速度就越快,因此傅里叶变换是研究函数奇性的基本工具,但由于傅里叶变换缺乏局部性,所以傅里叶变换只能确定函数奇性的整体性质,而我们希望能够知道一个函数在什么位置有什么样的奇点,即函数奇性的局部性质。这样在评价图像质量的均方误差中对奇性部分赋权,加大奇性部分的权重,以赋权的均方误差作为评价图像质量的客观标准,使客观评价的标准尽可能与人眼的主观评价标准相符。

现以$f(x, y)$表示一个图像信号,$f^*(x, y)$表示重建的图像信号,不妨设$f(x, y)$和$f^*(x, y)$都属于$L^2(\mathbf{R}^2)$。定义赋权的均方误差为$R(f)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x, y)-f^*(x, y)|^2\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\rho(x, y)$

为权函数，则 $\rho(x, y)$ 应该具有这样一些特性：

(1) $\rho(x, y)$ 要能够反映出 $f(x, y)$ 的奇性的位置和强弱；

(2) $\rho(x, y)$ 的值能随 $f(x, y)$ 的奇性的强弱变化；

(3) $\rho(x, y)$ 能使上述积分收敛。

但奇性并不完全来自于原信号的突变，噪声也会导致奇性的出现，可以采用光滑化的方法先去掉噪声。

为了叙述方便，先以一维信号的情况为例。

取一个光滑函数 $G(x)$，使满足：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)\mathrm{d}x = 1$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} G(x) = 0$。

例如可取高斯函数，令 $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$，记 $\frac{\mathrm{d}G(x)}{\mathrm{d}x} = \psi(x)$，则 $\psi(x)$ 显然是一个小波母函数。以 s 作为尺度因子，记 $\psi_s(x) = \frac{1}{s}\psi\left(\frac{x}{s}\right)$，$s > 0$。

作卷积 $(f * \psi_s) = \frac{1}{s}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\psi\left(\frac{x-u}{s}\right)\mathrm{d}u$，这恰好相当于以 $\frac{1}{\sqrt{s}}\psi(-x)$ 为母函数，对 $f(x)$ 作了小波变换。且 $\frac{\mathrm{d}G_s(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}G\left(\frac{x}{s}\right)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{s^2}G'\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{s}\psi_s(x)$。

记 $W_s f(x) = f * \psi_s = f * \left(s\frac{\mathrm{d}G_s(x)}{\mathrm{d}x}\right) = s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * G_s)$。这里 s 就是一个磨光尺度，它的选取决定了磨光的“程度”，所以 s 的选取可以实际需要来确定。经磨光后，一些由噪声引起的较小的突变将被“磨掉”，而剩下的较大的突变是我们所需要考虑的部分。$(f * G_s)(x)$ 就是去噪后的图像信号。$f * G_s$ 的变化情况，可由 $|W_s f(x)| = \left|s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f * G_s)\right|$ 的大小来刻画。使 $|W_s f(x)|$ 取极大值的点，就是 $f * G_s$ 的突变点。如图 6－1 所示。

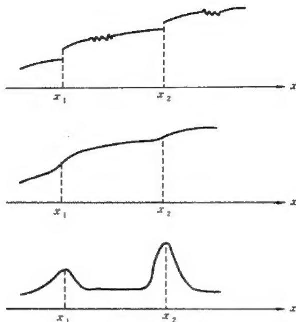


图 6-1

由上面的分析可知，权函数 $\rho(x)$ 应由原信号 $f(x)$ 和重建信号 $f^*(x)$ 确定，$\rho(x)$ 的值应随 $|W_s f(x)|$ 的值增大而增大，同时也应考虑到平缓部分的误差，因此在 $|W_s f(x)|$ 的极小值处 $\rho(x)$ 的值也不能为零，对 $f^*(x)$ 也应有同样的结果，依据这样的原理，可以构造权函数 $\rho(x)$ 如下：

$$\rho(x) = \frac{B + A\,|W_s f(x)|}{1 + |W_s f(x)|} + \frac{D + C\,|W_s f^*(x)|}{1 + |W_s f^*(x)|},$$

其中 A, B, C, D 是常数，满足 $0 < B < A$，$0 < D < C$，这些参数可以根据实验数据进行优化来确定。由于 $\rho(x)$ 是有界函数，在 $f(x) \in L^2$，$f^*(x) \in L^2$ 的前提下，可以保证积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x) - f^*(x)|^2 \rho(x) \mathrm{d}x \text{ 收敛。}$$

关于二维权函数 $\rho(x, y)$ 的构造，可以令

$$j(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{x^2+y^2-1}} & x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{其他。} \end{cases}$$

设 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} j(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = c$，再令 $J(x, y) = \frac{1}{c}j(x, y)$，则 $J(x, y)$ 满足：

(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} J(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$；

(2) $\lim\limits_{x^2+y^2\to\infty} J(x, y) = 0$。

取 $J_s(x, y) = \frac{1}{s^2}J\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right),\ s>0$，

$\psi^{(1)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}J(x, y)$，$\psi^{(2)}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}J(x, y)$，

则
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}J_s(x, y) &= \frac{1}{s^3}\psi^{(1)}\left(\frac{x}{s}, \frac{y}{s}\right) \\ &= \frac{1}{s}\psi_s^{(1)}(x, y)。\end{aligned}$$

所以　$\psi_s^{(1)}(x, y) = s\frac{\partial}{\partial x}J_s(x, y)$；

同理，$\psi_s^{(2)}(x, y) = s\frac{\partial}{\partial y}J_s(x, y)$。

作小波变换：

$$\begin{aligned}W_s^{(1)}f(x, y) &= (f * \psi_s^{(1)})(x, y) \\ &= f * \left(s\frac{\partial}{\partial x}J_s\right) \\ &= s\frac{\partial}{\partial x}(f * J_s)。\end{aligned}$$

$$W_s^{(2)}f(x, y) = s\frac{\partial}{\partial y}(f * J_s)。$$

与一维情况类似，选取适当的磨光因子 s 来“磨”去较小的突变部分，保留较大的突变部分。

矢量 $\begin{bmatrix} W_s^{(1)}f(x, y) \\ W_s^{(2)}f(x, y) \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(f * J_s) \\ \frac{\partial}{\partial y}(f * J_s) \end{bmatrix} = s\nabla(f * J_s)$ 的模的大小反映了 $f(x, y)$ 在"磨掉"了噪声后的 $f * J_s$ 的变化情况，$|\nabla(f * J_s)|$ 的极大值的点，就是经适当去噪后的突变点，所以二维权函数$\rho(x, y)$可取为

$$\rho(x, y) = \frac{B + A|s\nabla(f * J_s)|}{1 + |s\nabla(f * J_s)|} + \frac{D + C|s\nabla(f^* * J_s)|}{1 + |s\nabla(f^* * J_s)|},$$

参数 A, B, C, D 满足 $0 < B < A$，$0 < D < C$，由实验来优化确定。

权函数 $\rho(x, y)$ 为有界函数，当 $f(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$，$f^*(x, y) \in L^2(\mathbf{R}^2)$ 时，

积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x, y) - f^*(x, y)|\rho(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 收敛。

这样，由小波变换构造的权函数来定义赋权均方误差，既反映了重建图像在平缓部分与原信号的差异，又能反映在突变部分的差异，以此作为一种评价图像质量的客观标准，与人眼视觉的主观评价标准具有较好的一致性。以此为基础，还可以根据实际情况的需要，增加若干个参数，以达到更好的效果。

参 考 文 献

[1] 崔锦泰.小波分析导论,西安交通大学出版社,1995

[2] 李世雄,刘家琦,小波变换和反演数学基础,地质出版社,1994

[3] 李建平,唐远炎,小波分析方法的应用,重庆大学出版社,1999

[4] 杨福生,小波变换的工程分析与应用,科学出版社,1999

[5] 李延保,楼宇同,应用泛函基础,南京工学院出版社,1986

[6] 杜珣,现代数学引论,北京大学出版社,1996

[7] 彭瑞仁.信息技术中的数据压缩——快速取样定理,上海工业大学学报,1994,15(4)

[8] 彭瑞仁,许梦杰,莫玉龙.构造性质优良正交小波母函数及小波包的一种方法,中国学术期刊文摘,2001,7(6)

[9] 胡英,Meyer 型正交小波的构造及小波包在分频中的应用,上海大学硕士学位论文,2000

[10] 李会元等,重力异常界面反演的 Gauss - Newton 方法及其隐式迭代实现,上海大学学报,1999,5(1)